Primeira Prova de Física Matemática I – Soluções

(Equações a Derivadas Parciais e Séries de Fourier)

IFUSP - 29 de Abril de 2015

Exercício 1 (Valor 3.5) *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função 2π –periódica tal que*

$$f(x) = x \quad , \qquad -\pi < x < \pi \ .$$

A série de Fourier Sf de f é

$$Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

onde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx \; dx \\ &= \frac{-2}{\pi n}\left(x\cos nx|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx \; dx \right) \\ &= \frac{-2}{n}\cos n\pi \end{aligned}$$

Portanto,

$$Sf(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \ . \tag{1}$$

A série de Fourier

$$SF(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx \tag{2}$$

da função $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π–periódica tal que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{x} f(y)\, dy \\ &= \int_0^{x} y\, dy = \frac{1}{2}x^2 \ , \qquad -\pi < x < \pi \end{aligned} \tag{3}$$

é, pelo Teorema sobre a integração de série de Fourier (pág. 33, "Análise de Fourier e EDPs", Djairo G. de Figueiredo), dada pela integração de (1) termo-a-termo

$$SF(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\left(\cos nx - 1\right) \tag{4}$$

de onde se conclui, a partir de sua convergência uniforme: $F(x) = SF(x)$ *e de (3), (2) e (4):*

$$A_n = (-1)^n \frac{2}{n^2} \tag{5}$$

e

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{3}\pi^2 \ . \tag{6}$$

Logo

$$\frac{1}{2}x^2 \ = \frac{1}{6}\pi^2 + 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \ , \qquad -\pi < x < \pi \ .$$

Pela identidade de Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi F(x)^2 dx = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty A_n^2$$

concluímos, juntamente com

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi F(x)^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{x^4}{4} dx = \frac{\pi^4}{10} \ ,$$

devido a (3), e

$$\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty A_n^2 = \frac{\pi^4}{18} + 4 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} \ ,$$

devido a (6) e (5), a relação almejada:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{4} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{18} \right) = \frac{\pi^4}{90} \ .$$

Exercício 2 (Valor 3.0) *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *a função*

$$f(x) = \sin \omega x \ , \qquad 0 \leq x < \pi \, , \tag{7}$$

2π*–periódica e ímpar, com* $0 < \omega < 1$. *Calculemos sua séries de Fourier*

$$Sf(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin nx$$

onde

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\omega x\ \sin nx\ dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos(\omega-n)x - \cos(\omega+n)x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\omega-n}\sin(\omega-n)\pi - \frac{1}{\omega+n}\sin(\omega+n)\pi\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\omega-n} - \frac{1}{\omega+n}\right)\sin\omega\pi\ \ \cos n\pi \\
&= (-1)^n\frac{2n}{\pi(\omega^2-n^2)}\sin\omega\pi\ ,
\end{aligned}
$$

resultando

$$Sf(x) = \frac{2}{\pi}\sin\omega\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\omega^2-n^2}\sin nx$$

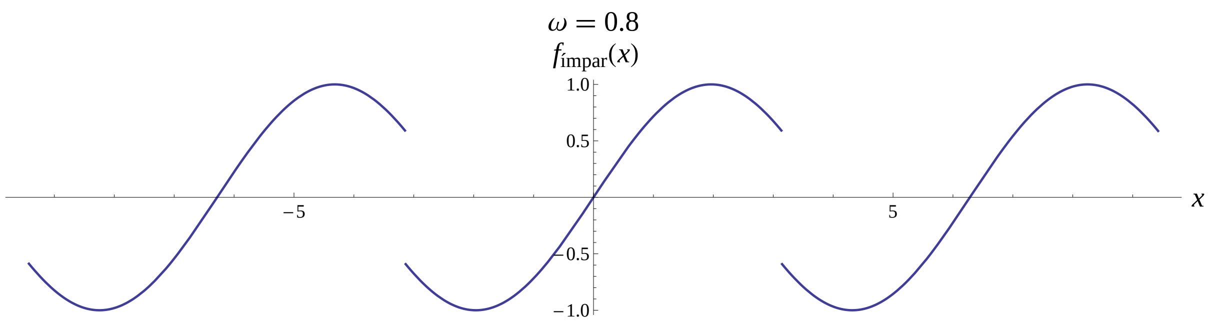

Fig. 1:

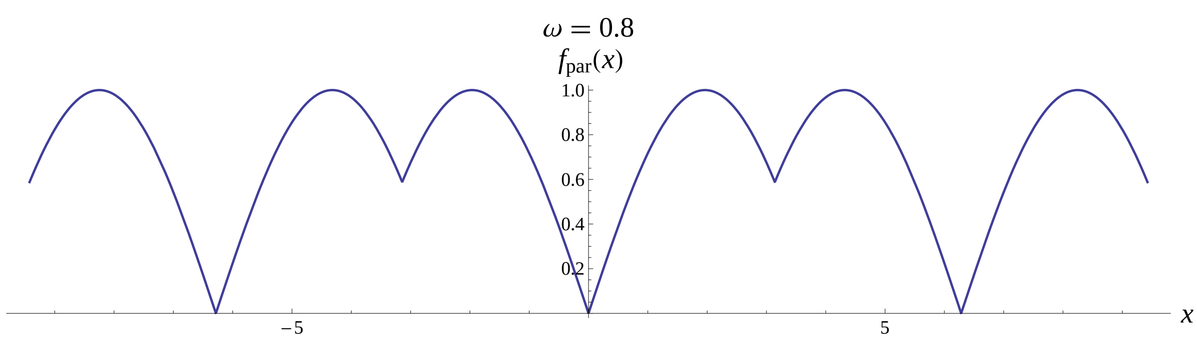

Fig. 2:

Conforme o gráfico da função f com $\omega = 0.8$ exibido na Figura 1, f com $0 < \omega < 1$ é descontinua nas extremidades do intervalo $(-\pi, \pi)$ e sua série de Fourier Sf não converge uniformemente para

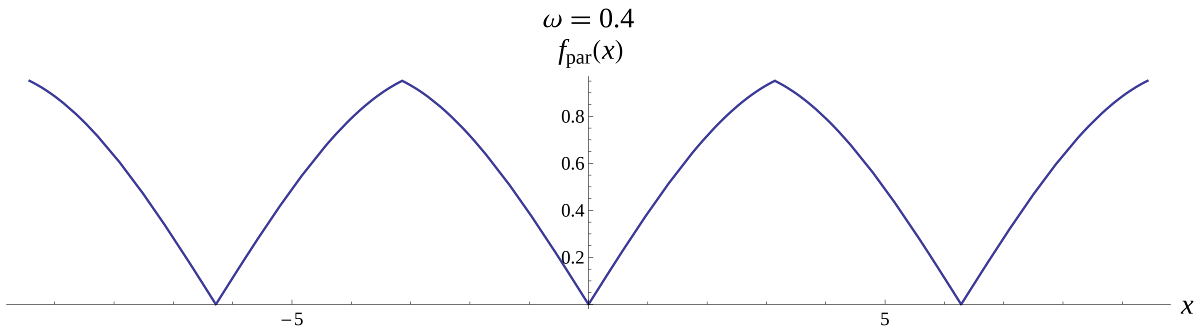

Fig. 3:

f em $[-\pi, \pi]$. Caso a convergência fosse uniforme, a soma de funções contínuas resultaria em uma função contínua neste intervalo em contradição com o gráfico da função.

Suponhamos que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π–periódica seja par e tal que (7) é satisfeita com a mesma condição sobre ω. As figuras 2 e 3 mostram o gráfico de f com $\omega = 0.8$ e $\omega = 0.4$, manifestamente contínuas.

A função f com $1/2 < \omega < 1$ no intervalo $(0, 2\pi)$ não é côncava nem convexa, sendo possível traçar um segmento de reta ligando dois pontos da curva que intercepta o gráfico de f no seu interior – parte do segmento ficando abaixo e parte acima da curva – em contradição com a definição de convexidade de uma função. A função f com $\omega \leq 1/2$ no intervalo $(0, 2\pi)$ é côncava como pode ser visto na figura 3. Observe que o máximo da função $\sin \omega x$ em $(0, \pi)$ se encontra no interior do intervalo se $1/2 < \omega < 1$ e na extremidade $x = \pi$ se $\omega \leq 1/2$.

Exercício 3 (Valor 3.5) *Considere o seguinte problema de valores inicial e de fronteira (PVIF):*

$$\frac{1}{\kappa}\, u_t - u_{xx} = 0 \ ,$$

em $R = \{(t, x) : t > 0\, , \, 0 < x < 1\}$, com

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 1\, , \qquad t > 0$$

e

$$u(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < h \\ 1 & \text{se} \quad h \leq x < 1 \end{cases}$$

Para determinar a solução deste problema, escrevemos

$$u(t, x) = 1 + w(t, x) \tag{8}$$

segundo a qual o PVIF original é reduzido a um PVIF para a função w:

$$\frac{1}{\kappa}\, w_t - w_{xx} = 0 \ , \tag{9}$$

em $R = \{(t, x) : t > 0\, , \, 0 < x < 1\}$, com condição de fronteira homogênea

$$w(t, 0) = w(t, 1) = 0\, , \qquad t > 0 \tag{10}$$

e inicial

$$w(0,x) = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad 0 \leq x < h \\ 0 & \text{se} \quad h \leq x < 1 \end{cases} . \tag{11}$$

Resolvendo o PVIF para w pelo método de Fourier, as soluções de (9) e (10) da forma

$$w(t,x) = T(t)X(x)$$

satisfazem um par de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} T' + \lambda^2 \kappa T &= 0 \\ X'' + \lambda^2 X &= 0 \ , \qquad X(0) = X(1) = 0 \end{aligned}$$

cuja solução geral

$$T = Ce^{-\lambda^2 \kappa t}$$

e

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \\ X(0) &= A = 0 \\ X(1) &= B \sin \lambda = 0 \end{aligned}$$

resulta em uma seqüência de autovalores e auto–funções correspondentes

$$\begin{aligned} \lambda_n &= n\pi \\ X_n &= \sin n\pi x \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ . \end{aligned}$$

Segundo o princípio de superposição, a solução do problema é dada por uma combinação linear de soluções $w_n(t,x) = \exp\left(-n^2\pi^2\kappa t\right) \sin n\pi x$*,* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2\kappa t} \sin n\pi x \tag{12}$$

onde os b_n *são coeficientes ímpares da condição inicial (11)*

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \ dx \\ &= \frac{-2}{\pi} \int_0^h \sin n\pi x \ dx \\ &= \frac{-2}{\pi n} \left(1 - \cos n\pi h\right) \ . \end{aligned} \tag{13}$$

Substituindo (12) e (13) em (8), concluímos

$$u(t,x) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi h}{n} e^{-n^2\pi^2\kappa t} \sin n\pi x \ . \tag{14}$$

Temperatura de equilíbrio: com exclusão de 1*, todas as componentes da solução (14) do PVIF original tendem a* 0 *quando* $t \to \infty$*:*

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} w(t,x) &= \lim_{t\to\infty} (u(t,x) - 1) \\
&= -\frac{2}{\pi} \lim_{t\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n\pi h}{n} e^{-n^2\pi^2\kappa t} \sin n\pi x \\
&= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n\pi h}{n} \lim_{t\to\infty} e^{-n^2\pi^2\kappa t} \sin n\pi x \ = 0
\end{aligned}$$

devido a convergência uniforme da série em intervalos fechados de $t > 0$*, de modo que* 1 *é a temperatura de equilíbrio e todos os pontos da barra eventualmente vão assumir a temperatura dos reservatórios em contato com suas extremidades.*