Primeira Prova de Física Matemática I

(Equações a Derivadas Parciais e Séries de Fourier)

IFUSP - 29 de Abril de 2015 - 9:00 / 11:00 hs

Exercício 1 (Valor 3.5) *Escreva a série de Fourier da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π *–periódica e tal que*

$$f(x) = x \quad , \qquad -\pi < x < \pi \ .$$

Em seguida, calcule a série de Fourier da função

$$F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$$

e use a identidade de Parseval para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \ .$$

Exercício 2 (Valor 3.0) *Determine a série de Fourier (em senos) da função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin \omega x \ , \qquad 0 \le x < \pi \ , \tag{1}$$

2π*–periódica e ímpar, com* $0 < \omega < 1$.

Com base no gráfico desta função, sua série de Fourier converge uniformemente? Suponha agora $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π*–periódica, par e tal que (1) é satisfeita com a mesma condição sobre* ω*. Como base apenas no gráfico de* f*, sem fazer contas,* f *é contínua?* f *é uma função convexa em* $(0, 2\pi)$*?*

Exercício 3 (Valor 3.5) *Uma barra condutora de comprimento unitário tem as faces laterais isoladas e as faces transversais em contato com um reservatório de calor mantido a temperatura de* $1°C$*. A propagação do calor na barra é descrita pelo seguinte problema de valores inicial e de fronteira (PVIF):*

$$\frac{1}{\kappa}\, u_t - u_{xx} = 0 \ ,$$

em $R = \{(t, x) : t > 0 \,,\, 0 < x < 1\}$*, com*

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 1 \,, \qquad t > 0$$

e

$$u(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le x < h \\ 1 & \text{se} \quad h \le x < 1 \end{cases}$$

Determine a solução deste problema. Determine, em seguida, a temperatura de equilíbrio.

Indicação: Escreva $u(t, x) = 1 + w(t, x)$ e o PVIF para a função w. Resolva o PVIF para w, cuja condição de fronteira é homogênea, pelo método de Fourier. Escreva a solução u e determine a temperatura de equilíbrio.