

Segunda Prova de Física Matemática I – Soluções
(Equações a Derivadas Parciais e Transformada de Fourier)
IFUSP - 2 de Julho de 2015

Exercício 1 (Valor 3.5) *Considere o PVIF de uma corda elástica idealmente flexível de comprimento L , sujeita a uma força linear restauradora uniforme, para o deslocamento $u = u(t, x)$ em relação a sua posição de repouso:*

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = -k u, \quad k > 0 \quad (1)$$

em $R = \{t > 0, 0 < x < L\}$, com extremidades fixas (na posição de repouso)

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

e dados iniciais

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3)$$

(a) *Para obter a equação da energia da corda, vamos assumir que u é uma solução do PVIF no sentido estrito, isto é u da classe C^2 em R e da classe C^1 em $\bar{R}$. Lembramos que $v = \sqrt{\tau/\rho}$, a velocidade de propagação da onda na corda, ρ a densidade (linear) e τ a tensão em repouso, mantêm-se constante durante o movimento. Multiplicando a equação (1) por τu_t (tensão $\times$ velocidade instantânea da corda em x), têm-se (com $K = \tau k$)*

$$\begin{aligned} 0 &= \rho u_{tt} u_t + K u u_t - \tau u_{xx} u_t \\ &= \rho u_{tt} u_t + K u u_t + \tau u_{xt} u_x - \tau (u_{xt} u_x + u_{xx} u_t) \\ &= \frac{\rho}{2} (u_t^2)_t + \frac{K}{2} (u^2)_t + \frac{\tau}{2} (u_x^2)_t - \tau (u_x u_{tx} + u_{xx} u_t) \\ &= \frac{\rho}{2} (u_t^2)_t + \frac{K}{2} (u^2)_t + \frac{\tau}{2} (u_x^2)_t - \tau (u_x u_t)_x \end{aligned}$$

resultando, ao integrar-se sobre a extensão da corda,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L (\rho u_{tt} u_t + K u u_t - \tau u_{xx} u_t) dx \\ &= \int_0^L \left(\frac{\rho}{2} (u_t^2)_t + \frac{K}{2} (u^2)_t + \frac{\tau}{2} (u_x^2)_t - \tau (u_x u_t)_x \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (\rho u_t^2 + K u^2 + \tau u_x^2)_t dx - \tau u_x u_t \Big|_0^L \end{aligned} \quad (4)$$

pelo teorema fundamental do cálculo.

O integrando da expressão (4) é uma função contínua em R , integrável em $[0, L]$ e, por conseguinte, sua derivada com respeito a t pode ser tomada fora da integral. Por (2), o termo de fronteira se anula:

$$-\tau u_x u_t \Big|_0^L = \tau (u_x(t, 0)u_t(t, 0) - u_x(t, L)u_t(t, L)) = 0$$

(sendo $u(t, 0)$ e $u(t, L)$ funções em t identicamente nulas, suas derivadas $u_t(t, 0)$ e $u_t(t, L)$ são identicamente nulas) e (4) pode então ser escrita como

$$E'(t) = 0$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho u_t^2 + K u^2 + \tau u_x^2) dx \quad (5)$$

é a energia da corda, conservada pelo movimento.

(b) A energia $E(t)$, sendo uma quantidade conservada ao longo do tempo, pode ser expressa em termos dos dados iniciais (3) do problema:

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho g(x)^2 + K f(x)^2 + \tau f'(x)^2) dx . \quad (6)$$

(c) Caso uma solução do PVIF exista (no sentido estrito), a conservação de E garante sua unicidade. De fato, se $u^1(t, x)$ e $u^2(t, x)$ forem duas soluções distintas do PVIF, então a diferença

$$w(t, x) = u^1(t, x) - u^2(t, x) \quad (7)$$

satisfaz o PVIF (1), (2) com (3) substituído pelo dado inicial trivial:

$$w(0, x) = 0 \quad \text{e} \quad w_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L ,$$

de onde se conclui, por (6),

$$E(t) = E(0) = 0$$

e, por (5),

$$\frac{1}{2} \int_0^L (\rho w_t^2 + K w^2 + \tau w_x^2) dx = 0$$

resultando, devido a continuidade do integrando em $\bar{R}$,

$$w(t, x) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq L ,$$

em contradição com a hipótese em (7). Logo $u^1 \equiv u^2$ em $\bar{R}$.

Exercício 2 (Valor 3.5) Considere o problema de Cauchy de uma corda vibrante semi-infinita:

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (8)$$

com a extremidade fixa na posição de equilíbrio, $u(t, 0) = 0$, $t > 0$, e

$$u(0, x) = \sin x \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = e^{-x}, \quad x > 0 . \quad (9)$$

(a) Vamos calcular o deslocamento $u(t, x)$ da corda. Pela solução geral de (8),

$$u(t, x) = F(x + vt) + G(x - vt) . \quad (10)$$

Para $x - vt \geq 0$ e dados iniciais (9), temos

$$\begin{aligned} u(0, x) &= F(x) + G(x) = \sin x \\ u_t(0, x) &= v(F(x) - G(x))' = e^{-x} . \end{aligned} \quad (11)$$

A equação da integral desta última

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{v} \int_0^x e^{-y} dy + K$$

onde K é uma constante arbitrária, juntamente com (11), formam um sistema de equações algébricas para F e G , cuja solução para $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2v} e^{-x} + K' \\ G(x) &= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2v} e^{-x} - K' \end{aligned} \quad (12)$$

com $K' = (K + 1/v)/2$, quando substituída em (10) resulta na fórmula de D'Alembert

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (\sin(x + vt) + \sin(x - vt)) - \frac{1}{2v} (e^{-(x+vt)} - e^{-(x-vt)}) . \quad (13)$$

Para $x - vt < 0$, (10) e a condição de fronteira

$$u(t, 0) = F(vt) + G(-vt) = 0$$

resulta para $y > 0$ em

$$G(-y) = -F(y) = -\frac{1}{2} \sin y + \frac{1}{2v} e^{-y} - K'$$

de onde se conclui, juntamente com (12) e (10),

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (\sin(x + vt) - \sin(vt - x)) - \frac{1}{2v} (e^{-(x+vt)} - e^{-(vt-x)}) . \quad (14)$$

(b) A solução (14) de (8)–(9) para $x - vt < 0$ é anti-simétrica

$$u(t, -x) = -u(t, x)$$

quando estendida para $x \in \mathbb{R}$. Já a solução (13) para $x - vt \geq 0$ não o é, como deveria, pela seguinte razão. Notamos que os termos $(\sin(x + vt) + \sin(x - vt)) / 2$ em (13) e $(\sin(x + vt) - \sin(vt - x)) / 2$ em (14), são funções ímpares de x mas os termos envolvendo as exponenciais divergem quando x tende a $-\infty$. Porém, se substituirmos $(e^{-(x+vt)} - e^{-(x-vt)}) / (2v)$ por $(e^{-|x+vt|} - e^{-|x-vt|}) / (2v)$ em (13) e $(e^{-(x+vt)} - e^{-(vt-x)}) / (2v)$ por $(e^{-|x+vt|} - e^{-|vt-x|}) / (2v)$ em (14), o problema das divergências

não mais existe, as soluções (13) e (14) com estas modificações coincidem com as anteriores para $x \geq 0$ e tornam-se ímpares (anti-simétricas pela troca de x por $-x$).

Alternativamente, se a fórmula de D'Alembert fosse empregada no PVI (8)–(9) em $t > 0$, $-\infty < x < \infty$, com $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ dados pela extensão de $f(x) = \sin x$ e $g(x) = e^{-x}$ para $x \in \mathbb{R}$ como uma função ímpar (f já é), então a solução $\tilde{u}(t, x)$ é uma função ímpar de x que coincide com (13) e (14) nos dois domínios $x - vt \geq 0$ e $x - vt < 0$ para $x \geq 0$.

(c) Escrevemos a solução (13) para $x - vt \geq 0$ e (14) para $x - vt < 0$ (com as modificações do item (b)) em uma única expressão válida para todo $t, x \geq 0$:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (\sin(x + vt) + \sin(x - vt)) - \frac{1}{2v} (e^{-|x+vt|} - e^{-|x-vt|}) .$$

Exercício 3 (Valor 3.5) Considere o PVI

$$u_{tt} - u_{xx} = h(t, x) , \quad t > 0 , \quad -\infty < x < \infty \quad (15)$$

sujeita as condições iniciais $u(0, x) = u_t(0, x) = 0$, que rege o movimento de uma corda vibrante infinita forçada.

(a) Se $\hat{\chi}_b(\xi)$ denota a transformada de Fourier da função $\chi_b(x) = \sqrt{\pi/2}$ se $|x| \leq b$ e $\chi_b(x) = 0$ se $|x| > b$, então

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_b(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-b}^b e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\xi} \frac{e^{-i\xi b} - e^{-i\xi(-b)}}{-2i} \\ &= \frac{\sin b\xi}{\xi} . \end{aligned}$$

(b) Para verificar que

$$U(t) = \int_0^t \frac{\sin b(t-\tau)}{b} H(\tau) d\tau \quad (16)$$

satisfaz $U'' + b^2 U = H$ com $U(0) = U'(0) = 0$, usamos o teorema fundamental do cálculo: $\frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t)$ juntamente com a regra de Leibnitz: $(fg)' = f'g + fg'$.¹ Diferenciando (16) duas vezes, sucessivamente,

$$\begin{aligned} U'(t) &= \left. \frac{\sin b(t-\tau)}{b} H(\tau) \right|_{\tau=t} + \int_0^t \cos b(t-\tau) H(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \cos b(t-\tau) H(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (17)$$

¹Note que (16) pode se escrita como $U(t) = \left(\sin bt \int_0^t \cos b\tau H(\tau) d\tau - \cos bt \int_0^t \sin b\tau H(\tau) d\tau \right) / b$ e cada um dos termos tem a forma $f(t)g(t)$.

e

$$\begin{aligned}
U''(t) &= \cos b(t - \tau)H(\tau)|_{\tau=t} - b \int_0^t \sin b(t - \tau)H(\tau)d\tau \\
&= H(t) - b^2U(t) ,
\end{aligned} \tag{18}$$

obtemos a equação desejada. Assumindo H contínua, os integrandos nas expressões (16) e (17) são funções contínuas de τ e as integrais sobre $[0, t]$ convergem para 0 quando t tende para 0, concluindo que (16) satisfaz **(i)** a equação diferencial de segunda ordem não-homogênea (18) e **(ii)** os dados iniciais $U(0) = U'(0) = 0$.

(c) O método da transformada de Fourier (na variável espacial), juntamente com os itens **(a)** e **(b)**, será utilizado para deduzir a solução

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} h(\tau, y) d\tau dy$$

do PVI, equação (15), onde $\Omega = \Omega(t, x)$ é o interior da região triangular no plano tempo $\times$ espaço com vértices $A = (t, x)$, $B = (0, x - t)$ e $C = (0, x + t)$.

Denotando por $\hat{u} = \hat{u}(t, \xi)$ a transformada de Fourier da solução $u(t, x)$ do PVI

$$\hat{u}(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) e^{-i\xi x} dx$$

e usando as propriedades de linearidade da transformada de Fourier e das derivadas com respeito a x

$$\widehat{u_{xx}} = i\xi \widehat{u_x} = -\xi^2 \hat{u}$$

e com respeito a t

$$\widehat{u_{tt}} = \hat{u}_{tt}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{h} &= \widehat{u_{tt} - u_{xx}} \\
&= \hat{u}_{tt} + \xi^2 \hat{u}
\end{aligned} \tag{19}$$

com $\hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_t(0, \xi) = 0$, cuja solução

$$\begin{aligned}
\hat{u}(t, \xi) &= \int_0^t \frac{\sin \xi(t - \tau)}{\xi} \hat{h}(\tau, \xi) d\tau \\
&= \int_0^t \hat{\chi}_{t-\tau}(\xi) \hat{h}(\tau, \xi) d\tau
\end{aligned} \tag{20}$$

segue do item **(b)** fazendo as identificações: $U = \hat{u}$, $b = \xi$ e $H = \hat{h}$. Na segunda linha usamos item **(a)** com $b = t - \tau$.

Para obter a solução do PVI original, faremos uso dos teoremas da convolução e fórmula da inversa. Assumindo que a ordem da integral de Fourier inversa e a integral em (20) possa ser trocada,² temos

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= (\hat{u})^\vee(t, x) \\
&= \int_0^t \left(\hat{\chi}_{t-\tau}(\xi) \hat{h}(\tau, \xi) \right)^\vee d\tau \\
&= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_{t-\tau} * h(\tau, x) d\tau \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{t-\tau}(x-y) h(\tau, y) dy d\tau \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} h(\tau, y) dy d\tau
\end{aligned}$$

que é justamente a integral sobre a região triangular $\Omega = \Omega(t, x)$ de vértices A , B e C . Para última integral usamos $\chi_{t-\tau}(x-y) = \sqrt{\pi/2}$ se $|x-y| \leq t-\tau$ e $\chi_{t-\tau}(x-y) = 0$ se $|x-y| > t-\tau$, cuja restrição $|x-y| \leq t-\tau$ pode ser escrita como

$$-t + \tau \leq x - y \leq t - \tau$$

ou ainda

$$x - t + \tau \leq y \leq x + t - \tau ,$$

concluindo a demonstração.

²Para aplicar o teorema de Fubini é suficiente que $\hat{h}(t, \xi)$ seja uniformemente contínua em t e ξ .