**Segunda Prova de Física Matemática I**

(Equações a Derivadas Parciais e Transformada de Fourier)

**IFUSP - 1 de Julho de 2015 - 9:00 / 11:00 hs**

**Exercício 1 (Valor 3.25)** ***(a)*** *Obtenha a equação da energia para o seguinte PVIF:*

$$\frac{1}{v^2}\,u_{tt} - u_{xx} = -k\,u\,,$$

*em* $R = \{t > 0\,,\ 0 < x < L\,\}$*, sujeita às condições de fronteira*

$$u(t,0) = u(t,L) = 0\,,$$

*para* $t > 0$*, e iniciais*

$$u(0,x) = f(x) \qquad \text{e} \qquad u_t(0,x) = g(x)\,,$$

*para* $0 \le x \le L$ *, com* $k$ *positivo.* ***(b)*** *Expresse a energia* $E(t)$ *conservada em termos dos dados iniciais.* ***(c)*** *Caso uma solução do PVIF exista, a conservação de* $E$ *garante sua unicidade?*

**Exercício 2 (Valor 3.25)** *Considere o problema de Cauchy de uma corda vibrante semi–infinita:*

$$\frac{1}{v^2}u_{tt} - \,u_{xx} = 0\,, \qquad t > 0\,,\, x > 0,$$

*com a extremidade fixa na posição de equilíbrio,* $u(t,0) = 0$*,* $t > 0$*, e*

$$u(0,x) = \sin x \qquad \text{e} \qquad u_t(0,x) = e^{-x}\,, \qquad x > 0\ .$$

***(a)*** *Calcule o deslocamento* $u(t,x)$ *da corda para cada instante* $t > 0$ *e ponto* $x > 0$*.* ***(b)*** *A solução é anti–simétrica quando estendida para* $x \in \mathbb{R}$*? Por que?* ***(c)*** *Escreva, por intermédio da dependência na variável* $|x - vt|$*, sua solução em uma única expressão válida para todo* $t, x \ge 0$*.*

***Indicação:*** *Utilize a solução geral:* $u(t,x) = F(x+vt) + G(x-vt)$ *para* $x - vt \ge 0$ *e* $x - vt < 0$*, juntamente com a condição de fronteira no segundo caso.*

**Exercício 3 (Valor 3.5)** *Considere o PVI*

$$u_{tt} - u_{xx} = h(t,x)\ , \qquad t > 0\ ,\ -\infty < x < \infty$$

*sujeita as condições iniciais* $u(0,x) = u_t(0,x) = 0$*, que rege o movimento de uma corda vibrante infinita forçada.* ***(a)*** *Calcule a transformada de Fourier* $\hat{\chi}_b(\xi)$ *da função* $\chi_b(x) = \sqrt{\pi/2}$ *se* $|x| \le b$ *e* $\chi_b(x) = 0$ *se* $|x| > b$*.* ***(b)*** *Verifique que*

$$U(t) = \int_0^t \frac{\sin b(t-\tau)}{b} H(\tau) d\tau$$

*satisfaz* $U'' + b^2 U = H$ *com* $U(0) = U'(0) = 0$*.* ***(c)*** *Utilize o método da transformada de Fourier (na variável espacial), juntamente com os ítens* ***(a)*** *e* ***(b)****, para deduzir a solução do PVI*

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_\Omega h(\tau,y)\ d\tau dy$$

*onde* $\Omega = \Omega(t,x)$ *é o interior da região triangular no plano tempo* $\times$ *espaço com vértices* $A = (t,x)$*,* $B = (0, x-t)$ *e* $C = (0, x+t)$*.*