

Primeira Prova de Física Matemática I - Soluções

(Equações a Derivadas Parciais e Séries de Fourier)

IFUSP - Abril de 2016

Exercício 1 (Valor 3.5) Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são duas funções 2π -periódicas seccionalmente contínuas (portanto, ambas de quadrado integrável), então a identidade de Parseval generalizada

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n) \quad (1)$$

se aplica, onde a_n 's e b_n 's, respectivamente α_n 's e β_n 's, são coeficientes de Fourier de f e g . **(i)** Considere a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = x \quad , \quad -\pi < x < \pi \quad , \quad (2)$$

2π -periódica. A série de Fourier $Sg(x)$ de $g(x)$ é

$$Sg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nx$$

com

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= \frac{-2}{\pi n} \left(x \cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right) \\ &= \frac{-2}{n} \cos n\pi \quad . \end{aligned}$$

Se

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

é a série de Fourier de uma função $f(x)$ como acima, então pela identidade (1), juntamente com o fato de $\alpha_n = 0$, $n \geq 0$,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \beta_n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} b_n \quad .$$

(ii) A função $|g(x)|$ é uma função 2π -periódica e par. A série de Fourier de $|g(x)|$:

$$S|g|(x) = \frac{\tilde{\alpha}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n \cos nx$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi n} \left(x \sin nx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin nx \, dx \right) \\
&= \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1)
\end{aligned}$$

é dada por

$$S|g|(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x . \quad (3)$$

(iii) Seja $\tilde{G} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função 2π -periódica dada por

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(x) &= \int_0^x \left(|y| - \frac{\pi}{2} \right) dy \\
&= \int_0^x \left(y - \frac{\pi}{2} \right) dy \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{2}, \quad \text{para } x \in (0, \pi)
\end{aligned} \quad (4)$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(x) &= \int_0^x \left(|y| - \frac{\pi}{2} \right) dy \\
&= \int_0^{-x} \left(y - \frac{\pi}{2} \right) (-dy) \\
&= \frac{-x^2}{2} - \frac{\pi x}{2}, \quad \text{para } x \in (-\pi, 0) ,
\end{aligned} \quad (5)$$

onde na passagem da primeira para segunda linha de (5) realizamos a mudança de variável $y \rightarrow -y$ e usamos o fato de $-x$ ser positivo se $-\pi \leq x < 0$, de forma que a segunda integral percorre valores positivos: $y \in [0, -x]$. Note que $\tilde{G}(x)$ é uma função ímpar, 2π -periódica e coincide com a função

$$G(x) = \int_0^x \left(|g(y)| - \frac{\pi}{2} \right) dy \quad (6)$$

no intervalo $(-\pi, \pi)$ pela definição (2) de g : $|g(x)| = |x|$ se $x \in (-\pi, \pi)$.

Vamos mostrar que $\tilde{G}(x) = G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para isso, resta verificar que $G(x)$ é periódica de período 2π , isto é, $G(x + 2\pi) = G(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Da definição (6) e periodicidade do

integrando $|g(y)| - \pi/2$, temos

$$\begin{aligned}
G(x+2\pi) - G(x) &= \int_x^{x+2\pi} \left(|g(y)| - \frac{\pi}{2} \right) dy \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(|g(y)| - \frac{\pi}{2} \right) dy \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(|y| - \frac{\pi}{2} \right) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(y - \frac{\pi}{2} \right) dy \\
&= \left(\frac{y^2}{2} - \frac{\pi y}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{7}$$

concluindo a verificação.

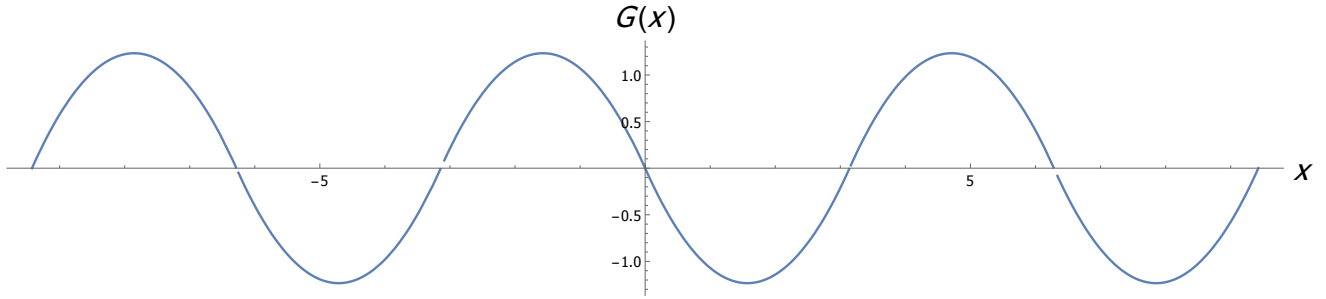


Figure 1:

Pelo teorema de integração das séries de Fourier, a série de Fourier de $G(x)$,

$$SG(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx \tag{8}$$

pode ser obtida integrando, termo a termo, sobre o intervalo $[0, x]$ a série de Fourier de $|g(x)| - \pi/2$, calculada no ítem anterior (veja (3)):

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(|g(y)| - \frac{\pi}{2} \right) dy &= -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \int_0^x \cos(2k-1)y \, dy \\
&= -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin(2k-1)x
\end{aligned} \tag{9}$$

de onde se conclui, comparando (8) e (9), que $B_{2k} = 0$ e $B_{2k-1} = \frac{-4}{(2k-1)^3}$, $k \in \mathbb{N}$.

Em relação às questões: **(a)** a função $G(x)$ é periódica? **(b)** é contínua? **(c)** qual a sua paridade?, argumentamos como segue. A periodicidade de $G(x)$ foi verificada em (7); A continuidade de $G(x)$ segue da própria definição (6), uma vez que o integrando é uma função contínua. De fato, basta que o integrando seja seccionalmente contínua para que a integral seja uma função contínua. Finalmente, a paridade ímpar de $G(x)$ segue de (4) e (5), juntamente com a igualdade $\tilde{G}(x) \equiv G(x)$. Veja o gráfico da função $G(x)$ na figura 1 para estas propriedades.

Exercício 2 (Valor 3.0) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função

$$f(x) = \sin \alpha x, \quad \text{para } 0 \leq x < \pi, \quad (10)$$

2π -periódica e par, com $0 < \alpha < 1$. A série de Fourier de f é

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

onde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \alpha x \, dx \\ &= \frac{-2}{\pi \alpha} \cos \alpha x \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi \alpha} (1 - \cos \alpha \pi) \end{aligned}$$

e, para $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \alpha x \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(\alpha - n)x + \sin(\alpha + n)x) \, dx \\ &= \frac{-1}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha - n} \cos(\alpha - n)x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\alpha + n} \cos(\alpha + n)x \Big|_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha - n} (1 - \cos(\alpha - n)\pi) + \frac{1}{\alpha + n} (1 - \cos(\alpha + n)\pi) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha - n} + \frac{1}{\alpha + n} \right) (1 - \cos \alpha \pi \cos n\pi) \\ &= \frac{-2\alpha}{\pi(n^2 - \alpha^2)} (1 - (-1)^n \cos \alpha \pi), \end{aligned}$$

resultando

$$Sf(x) = \frac{1}{\pi \alpha} (1 - \cos \alpha \pi) - \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} (1 - (-1)^n \cos \alpha \pi) \cos nx. \quad (11)$$

Estamos prontos para responder as questões sobre a função f :

(i) A função f é contínua? As figuras 2 e 3 mostram o gráfico de f com $\alpha = 0.8$ e $\alpha = 0.4$, manifestamente contínuas. A continuidade é consequência da continuidade de $\sin \alpha x$ em $(0, \pi)$, da paridade e periodicidade. Note que a série (11) é uniformemente convergente e como $f(x)$ é seccionalmente diferenciável, pelo teorema de Fourier, $Sf(x)$ converge pontualmente e uniformemente para $f(x)$, a qual é necessariamente contínua.

(ii) A função f é convexa ou côncava em $(0, 2\pi)$ para quais valores de α ? A função f com $1/2 < \alpha < 1$ no intervalo $(0, 2\pi)$ não é côncava nem convexa, sendo possível traçar um segmento de

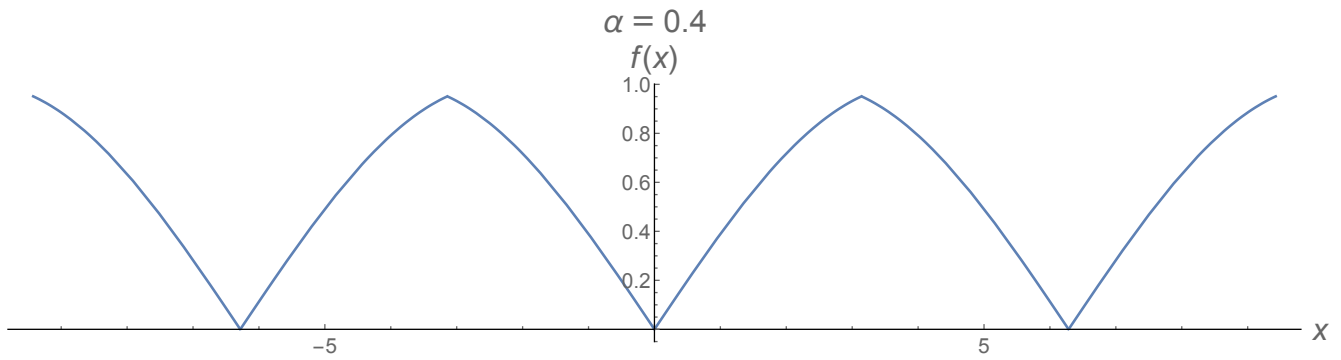


Figure 2:

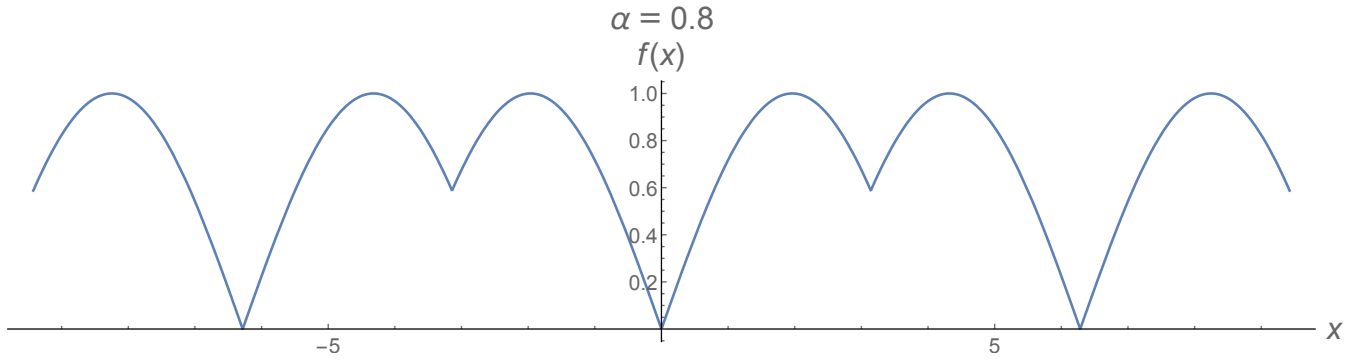


Figure 3:

reta ligando dois pontos da curva que intercepta o gráfico de f no seu interior – parte do segmento ficando abaixo e parte acima da curva – em contradição com a definição de convexidade de uma função (veja figura 3). A função f com $\alpha \leq 1/2$ no intervalo $(0, 2\pi)$ é côncava como pode ser visto na figura 2. Observe que o máximo da função $\sin \alpha x$ se encontra no interior do intervalo $(0, \pi)$ se $1/2 < \alpha < 1$ e na extremidade $x = \pi$ se $\alpha \leq 1/2$.

(iii) O sinal dos coeficientes de f é compatível com esta propriedade? Segue da expressão (11), juntamente com $n^2 - \alpha^2 \geq 0$ e $1 - (-1)^n \cos \alpha \pi \geq 0$ para $n \geq 1$ e $0 < \alpha \leq 1$, que todos os coeficientes a_n com $n \geq 1$, são negativos. A concavidade de $f(x)$ para $0 < \alpha \leq 1/2$ implica o mesmo sinal dos coeficientes que, por sua vez, é preservado mesmo se $1/2 < \alpha \leq 1$ quando a concavidade não é mais satisfeita.

Exercício 3 (Valor 3.5) Considere o seguinte problema de valores inicial e de fronteira (PVIF):

$$\frac{1}{\kappa} u_t - u_{xx} = 0 ,$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < 1\}$, com

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 1, \quad t > 0$$

e

$$u(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < r \\ 1 & \text{se } r \leq x < 1 \end{cases}$$

Para determinar a solução deste problema, escrevemos

$$u(t, x) = 1 + w(t, x) , \tag{12}$$

segundo a qual o PVIF original é reduzido a um PVIF para a função w :

$$\frac{1}{\kappa} w_t - w_{xx} = 0 , \quad (13)$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < 1\}$, com condição de fronteira homogênea

$$w(t, 0) = w(t, 1) = 0 , \quad t > 0 \quad (14)$$

e inicial

$$w(0, x) = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } 0 \leq x < r \\ 0 & \text{se } r \leq x < 1 \end{cases} . \quad (15)$$

Resolvendo o PVIF para w pelo método de Fourier, as soluções de (13) e (14) da forma

$$w(t, x) = T(t)X(x)$$

satisfazem um par de equações diferenciais ordinárias

$$T' + \lambda^2 \kappa T = 0$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0 , \quad X(0) = X(1) = 0$$

cuja solução geral

$$T = C e^{-\lambda^2 \kappa t}$$

e

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

$$X(0) = A = 0$$

$$X(1) = B \sin \lambda = 0$$

resulta em uma seqüência de autovalores e autofunções correspondentes

$$\lambda_n = n\pi$$

$$X_n = \sin n\pi x , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Segundo o princípio de superposição, a solução do problema é dada por uma combinação linear de soluções $w_n(t, x) = \exp(-n^2 \pi^2 \kappa t) \sin n\pi x$, $n \in \mathbb{N}$:

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 \kappa t} \sin n\pi x \quad (16)$$

onde os b_n são coeficientes de Fourier ímpares da condição inicial (15) (com $L = 1$)

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx \\ &= -2 \int_0^r \sin n\pi x \, dx \\ &= \frac{-2}{\pi n} (1 - \cos n\pi r) . \end{aligned} \quad (17)$$

Substituindo (16) e (17) em (12), concluímos

$$u(t, x) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi r}{n} e^{-n^2 \pi^2 \kappa t} \sin n\pi x . \quad (18)$$

Temperatura da barra no regime estacionário: com exclusão de 1, todas as componentes da solução (18) do PVI original tendem a 0 quando $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} w(t, x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (u(t, x) - 1) \\ &= -\frac{2}{\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi r}{n} e^{-n^2 \pi^2 \kappa t} \sin n\pi x \\ &= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi r}{n} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-n^2 \pi^2 \kappa t} \sin n\pi x = 0 \end{aligned}$$

devido a convergência uniforme em $[0, \pi]$ da série para $t > 0$, de modo que 1 é a temperatura de equilíbrio, segundo a qual todos os pontos da barra eventualmente irão assumir devido ao contato de suas extremidades com o reservatório à temperatura de 1° C .