

Primeira Prova de Física Matemática I

(Equações a Derivadas Parciais e Séries de Fourier)

IFUSP - 6 de Abril de 2016 - 19:00 / 21:00 hs

Exercício 1 (Valor 3.5) Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são duas funções 2π -periódicas seccionalmente contínuas (portanto, ambas de quadrado integrável), então a identidade de Parseval generalizada

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n) \quad (1)$$

se aplica, onde a_n 's e b_n 's, respectivamente α_n 's e β_n 's, são coeficientes de Fourier de f e g . **(i)** Considere a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = x, \quad -\pi < x < \pi,$$

2π -periódica e use a identidade (1) para escrever

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} xf(x)dx$$

em termos dos coeficientes de Fourier de f . **(ii)** Escreva a série de Fourier de $|g(x)|$. **(iii)** Escreva a função $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$G(x) = \int_0^x \left(|g(y)| - \frac{\pi}{2} \right) dy$$

e calcule a sua série de Fourier. A função $G(x)$ é periódica? É contínua? Qual a sua paridade? Argumente.

Exercício 2 (Valor 3.0) Determine a série de Fourier (em cossenos) da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin \alpha x, \quad 0 \leq x < \pi, \quad (2)$$

2π -periódica e par, com $0 < \alpha < 1$. A função f é contínua? É convexa ou côncava em $(0, 2\pi)$ para quais valores de α ? O sinal dos coeficientes de f é compatível com esta propriedade?

Exercício 3 (Valor 3.5) Uma barra condutora de comprimento unitário e difusibilidade κ tem as faces laterais isoladas e as faces transversais em contato com um reservatório de calor mantido a temperatura de 1°C . A propagação do calor na barra é descrita pelo seguinte problema de valores inicial e de fronteira (PVIF):

$$\frac{1}{\kappa} u_t - u_{xx} = 0,$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < 1\}$, com

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 1, \quad t > 0$$

e

$$u(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < r \\ 1 & \text{se } r \leq x < 1 \end{cases}$$

Determine a solução deste problema. Determine a temperatura da barra no regime estacionário.

Indicação: Escreva $u(t, x) = 1 + w(t, x)$ e o PVIF para a função w . Resolva o PVIF para w , cuja condição de fronteira é homogênea, pelo método de Fourier. Escreva a solução u e determine o regime estacionário tomando $t \rightarrow \infty$ em sua solução.