Segunda Prova de Física Matemática I – Soluções

(Equações a Derivadas Parciais e Transformada de Fourier)

IFUSP - 21 Maio 2016

Exercício 1 (Valor 3.5) *Considere o PVIF*

$$u_t - u_{xx} + \alpha^2 u = \gamma e^{-t}\,, \tag{1}$$

em $R = \{t > 0\,,\, 0 < x < \pi\}$, *com*

$$u(t,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(t,\pi) = \beta\,, \qquad t > 0 \tag{2}$$

e

$$u(0,x) = 0\,, \qquad 0 \le x < \pi\ , \tag{3}$$

sendo α, β *e* γ *números reais.*

(a) *Seja* $U = U(x)$ *a solução independente do tempo das equações (1) e (2) em* $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} -U'' + \alpha^2 U &= 0\ , \qquad 0 < x < \pi \\ U(0) &= 0 \\ U(\pi) &= \beta \end{aligned} \tag{4}$$

cuja solução, ao impor os valores de fronteira à solução geral,

$$\begin{aligned} U(x) &= A\cosh \alpha x + B \sinh \alpha x \\ U(0) &= A = 0 \\ U(\pi) &= B \sinh \alpha\pi = \alpha \end{aligned}$$

é

$$U(x) = \frac{\beta \sinh \alpha x}{\sinh \alpha\pi}\ . \tag{5}$$

(b) *O primeiro passo para resolução do PVFI é transformá-lo em outro PVIF com a condição de contorno homogênea. Escrevemos*

$$u(t,x) = U(x) + w(t,x) \tag{6}$$

onde $U(x)$ *é a solução de equilíbrio (*$\equiv$ *independente do tempo das equações (1) e (2) em* $t \to \infty$*). Substituindo (4) e (6) em (1), (2) e (3), resulta da linearidade das equações o seguinte PVIF para* w

$$w_t - w_{xx} + \beta w = \gamma e^{-t}\,, \tag{7}$$

em $R = \{t > 0\,,\, 0 < x < \pi\}$, *com*

$$w(t,0) = w(t,\pi) = 0\,, \qquad t > 0 \tag{8}$$

e

$$w(0,x) = -\frac{\beta \sinh \alpha x}{\sinh \alpha\pi}\,, \qquad 0 \le x < \pi \ . \tag{9}$$

Note para equação (7) que

$$u_t - u_{xx} + \alpha^2 u = -U'' + \alpha^2 U + w_t - w_{xx} + \alpha^2 w = w_t - w_{xx} + \alpha^2 w = \gamma e^{-t}$$

e as demais equações seguem analogamente.

(c) *O PVIF (7), (8) e (9) pode ser resolvido pelo método da variação dos parâmetros. Substituindo*

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin nx \qquad (10) \\ \gamma &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin nx \\ -\frac{\beta \sinh \alpha x}{\sinh \alpha\pi} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \end{aligned}$$

em (7), (8) e (9), resulta uma equação diferencial ordinária de primeira ordem para os c_n's:

$$\begin{aligned} c_n' + (n^2+\alpha^2)c_n &= g_n e^{-t}\ , \qquad t > 0 \\ c_n(0) &= b_n \end{aligned}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{aligned} c_n(t) &= b_n e^{-(n^2+\alpha^2)t} + g_n e^{-(n^2+\alpha^2)t} \int_0^t e^{(n^2+\alpha^2)s} e^{-s} ds \\ &= b_n e^{-(n^2+\alpha^2)t} + \frac{g_n}{n^2+\alpha^2-1}\left(e^{-t} - e^{-(n^2+\alpha^2)t}\right) \qquad (11) \end{aligned}$$

Os b_n's e g_n's são coeficientes de Fourier (não era solicitado na prova o seu cálculo) da função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, 2π–periódica ímpar tal que $f(x) = -\beta \sinh \alpha x/\sinh \alpha\pi$ e $g(x)=\gamma$ em $(0,\pi)$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{-2\beta}{\pi \sinh \alpha\pi} \int_0^\pi \sinh \alpha x \ \sin nx \ dx \\ &= \frac{\beta}{i\pi \sinh \alpha\pi} \int_0^\pi \left(\cos\left(n+i\alpha\right)x - \cos\left(n-i\alpha\right)x\right) dx \\ &= \frac{\beta}{i\pi \sinh \alpha\pi} \left(\frac{1}{n+i\alpha}\sin\left(n+i\alpha\right)\pi - \frac{1}{n-i\alpha}\sin\left(n-i\alpha\right)\pi\right) \\ &= \frac{\beta}{i\pi \sinh \alpha\pi} \left(\frac{1}{n+i\alpha} + \frac{1}{n-i\alpha}\right) i \sinh \alpha\pi \cos n\pi \\ &= \frac{2\beta}{\pi}\frac{n}{n^2+\alpha^2}\cos n\pi\ , \qquad (12) \end{aligned}$$

com o uso das relações

$$\sinh \alpha x \;\; \sin nx = \frac{1}{2i} \left(-\cos \left(n + i\alpha \right) x + \cos \left(n - i\alpha \right) x \right) \;,$$

na segunda igualdade, $\sin n\pi = 0$ *e* $\sin i\alpha\pi = i \sinh \alpha\pi$ *na terceira e quarta igualdade, e*

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{2\gamma}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \; dx \\ &= \frac{2\gamma}{\pi n} (1 - \cos n\pi) \; . \end{aligned} \tag{13}$$

Substituindo (5), (10) e (11) (com b_n *e* g_n *dados por (12) e (13)) em (6), concluímos*

$$u(t,x) = \frac{\sinh \alpha x}{\sinh \alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(b_n - \frac{g_n}{n^2 + \alpha^2 - 1} \right) e^{-(n^2+\alpha^2)t} + \frac{g_n}{n^2 + \alpha^2 - 1} e^{-t} \right] \sin nx \; . \tag{14}$$

Exercício 2 (Valor 3.0) *Considere o problema de Cauchy (PVIF)*

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = 0 \,, \qquad t > 0 \,, \, x > 0, \tag{15}$$

com $u(t,0) = 0$, $t > 0$, *e*

$$u(0,x) = \sin x \qquad \text{e} \qquad u_t(0,x) = e^{-x} \,, \qquad x > 0 \; . \tag{16}$$

(a) *A solução geral de (15) é* $u(t,x) = F(x+vt) + G(x-vt)$*, onde* $F(x)$ *e* $G(x)$ *são funções arbitrárias determinadas pelos dados inicias e de fronteira.*

Para $x - vt \geq 0$*, temos*

$$\begin{aligned} u(0,x) &= F(x) + G(x) = \sin x \\ u_t(0,x) &= v \left(F(x) - G(x) \right)' = e^{-x} \; . \end{aligned} \tag{17}$$

Integrando a segunda equação

$$F(x) - G(x) = \frac{-1}{v} e^{-x} + 2C$$

onde C *é uma constante de integração. Resolvendo para* $F(x)$ *e* $G(x)$*, temos*

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \left(\sin x - \frac{e^{-x}}{v} \right) + C \\ G(x) &= \frac{1}{2} \left(\sin x + \frac{e^{-x}}{v} \right) - C \end{aligned} \tag{18}$$

resultando

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2} \left(\sin \left(x + vt \right) + \sin \left(x - vt \right) \right) + \frac{1}{2v} \left(e^{-x+vt} - e^{-x-vt} \right) \\ &= \sin x \cos vt + \frac{e^{-x}}{v} \sinh vt \; . \end{aligned} \tag{19}$$

Para $x - vt < 0$, usamos a condição de fronteira

$$u(t,0) = F(vt) + G(-vt) = 0$$

que implica, devido a (18),

$$G(-y) = -F(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-y}}{v} - \sin y\right) - C$$

para $y > 0$, de onde se conclui, juntamente com a solução geral e (18),

$$\begin{aligned} u(t,x) &= F(x+vt) + G(-(vt-x)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin(x+vt) - \sin(vt-x)\right) + \frac{1}{2v}\left(e^{-vt+x} - e^{-x-vt}\right) \\ &= \sin x \cos vt + \frac{e^{-vt}}{v}\sinh x \ . \end{aligned} \tag{20}$$

(b) *Quanto a paridade das soluções (19) e (20) com respeito a variável x, a primeira não tem paridade a segunda é ímpar pois é uma combinação linear de duas funções ímpares,* $\sin x$ *e* $\sinh x$*.*

Alternativamente, podemos escrever o PVIF original em $\mathbb{R}_+$ como um PVI em $\mathbb{R}$ estendendo os dados iniciais (16) como funções ímpares (método das imagens): $\tilde{f}(x) = \sin x$ e

$$\tilde{g}(x) = \frac{x}{|x|}e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x} & se \quad x > 0 \\ -e^{x} & se \quad x < 0 \end{cases}$$

A solução deste problema é dada pela fórmula de D'Alembert usual, bastando substituir na primeira equação em (19) as funções exponenciais pelas exponenciais de menos o módulo do argumento. Note, para isso, que $\left(-e^{-|x|}\right)' = \left(x/\,|x|\right)e^{-|x|}$ e a equação (17) ao ser integrada, seguida da resolução para F e G, resulta

$$u(t,x) = \sin x \cos vt + \frac{1}{2v}\left(e^{-|x-vt|} - e^{-|x+vt|}\right) \tag{21}$$

para todo $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, reproduzindo o resultado anterior quando restrito a $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Observe que não é possível tomar $x \leq 0$ e $t > 0$ na solução anterior (19) sem violar a condição $x - vt > 0$. A expressão (21) é ímpar por construção.

Exercício 3 (Valor 3.5) ***Corda percutida por martelo convexo:*** *Considere o seguinte PVIF:*

$$\frac{1}{v^2}\,u_{tt} - u_{xx} = 0\,, \tag{22}$$

em $R = \{t > 0\,,\, 0 < x < \pi\}$, com condição de fronteira

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0\,, \tag{23}$$

para $t > 0$, e iniciais $u(0,x) = f(x) = 0$, $0 \leq x \leq \pi$ e

$$u_t(0,x) = g(x) = \begin{cases} A\cos\dfrac{\pi}{2\delta}(x-a) & \text{se} \quad |x-a| \leq \delta \\ 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < a-\delta \ \text{ e } \ a+\delta < x \leq \pi \end{cases}\,, \tag{24}$$

onde a e δ são reais positivos tais que $\delta < a < \pi - \delta$. Pelo método de Fourier de separação de variáveis a solução do PVIF, dado pelas equações (22), (23) e (24), tem a forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin nx \tag{25}$$

com

$$c_n(t) = b_n \cos nvt + d_n \sin nvt \tag{26}$$

onde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \; dx = 0 \; , \tag{27}$$

$$\begin{aligned} nvd_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin nx \; dx \\ &= \frac{2A}{\pi}\int_{a-\delta}^{a+\delta} \cos\frac{\pi}{2\delta}(x-a)\sin nx \; dx \; , \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{28}$$

são, respectivamente, os coeficientes de Fourier das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $2\pi-$periódicas, ímpares e tais que em $[0,\pi]$, $f(x)$ é identicamente nula e $g(x)$ é dada por (24). Fazendo a mudança de variável $y = x - a$ em (28) para centrar a integral em $x = a$, juntamente com

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right) \; ,$$

obtemos

$$\begin{aligned} nvd_n &= \frac{2A}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\cos\frac{\pi}{2\delta}y \sin n(y+a) \; dy \\ &= \frac{2A}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\cos\frac{\pi}{2\delta}y\left(\sin ny\cos na + \cos ny \sin na\right) \; dy \\ &= \frac{4A}{\pi}\sin na\int_0^{\delta}\cos\frac{\pi}{2\delta}y\cos ny \; dy \\ &= \frac{2A}{\pi}\sin na\int_0^{\delta}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2\delta}+n\right)y + \cos\left(\frac{\pi}{2\delta}-n\right)y\right) \; dy \end{aligned}$$

com a integral $\int_{-\delta}^{\delta}\cos\frac{\pi}{2\delta}y\sin ny \; dx$ na segunda igualdade sendo nula pela paridade do integrando. Integrando a expressão resultante, tendo em vista que

$$\sin(\pi/2 \pm n\delta) = \cos n\delta \, ,$$

obtemos na sequência

$$\begin{aligned}
nvd_n &= \frac{2A}{\pi}\sin na\left(\frac{1}{\pi/2\delta+n}\sin\left(\pi/2+n\delta\right)+\frac{1}{\pi/2\delta-n}\sin\left(\pi/2-n\delta\right)\right) \\
&= \frac{2A}{\pi}\sin na\left(\frac{1}{\pi/2\delta+n}+\frac{1}{\pi/2\delta-n}\right)\cos n\delta \\
&= \frac{2A}{\pi}\frac{\pi/\delta}{\pi^2/\left(2\delta\right)^2-n^2}\sin na\cos n\delta \\
&= \frac{8\delta A}{\pi^2-4\delta^2n^2}\sin na\cos n\delta
\end{aligned}$$

de onde se conclui, juntamente com (25), (26) e (27), o resultado desejado:

$$u(t,x)=\frac{8\delta A}{v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2-4\delta^2n^2}\frac{\sin na\cos n\delta}{n}\sin nx\,\sin nvt\,.$$