Segunda Prova de Física Matemática I

(Equações a Derivadas Parciais: Propagação do Calor e Vibrações de uma Corda Elástica)

IFUSP - 18 Maio 2016 - 19:00 / 21:00 hs

Exercício 1 (Valor 3.5) *Considere o seguinte problema de valores inicial e fronteira (PVIF) para condução do calor em uma barra condutora de comprimento π e difusibilidade $\kappa = 1$:*

$$u_t - u_{xx} + \alpha^2 u = \gamma e^{-t} \,, \qquad t > 0\,,\, 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$u(t,0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t,\pi) = \beta\,, \qquad t > 0\,, \tag{2}$$

$$u(0,x) = 0\,, \qquad 0 < x < \pi,$$

com α, β e γ reais. ***(a)*** *Determine a temperatura $U = U(x)$ de equilíbrio do PVIF dada pela solução independente do tempo das equações (1) e (2) no regime estacionário ($t \to \infty$);* ***(b)*** *Escreva $u(t,x) = U(x) + w(t,x)$ e o PVIF para w;* ***(c)*** *Utilize o método de variação das constantes para determinar a solução do problema, deixando indicado, sem calcular, as integrais de Fourier dos dados do PVIF para w.*

Exercício 2 (Valor 3.0) *Considere o problema de Cauchy para o movimento de uma corda elástica semi–infinita ($u(t,x)$ é o deslocamento transversal instantâneo da corda no ponto x, com respeito ao equilíbrio):*

$$\frac{1}{v^2}u_{tt} - u_{xx} = 0\,, \qquad t > 0\,,\, x > 0,$$

com a extremidade em $x = 0$ fixa na posição de equilíbrio: $u(t,0) = 0$, $t > 0$, e dados iniciais

$$u(0,x) = \sin x \qquad \text{e} \qquad u_t(0,x) = e^{-x}\,, \qquad x > 0\,.$$

(a) *Calcule o deslocamento $u(t,x)$ da corda em cada instante $t > 0$ e cada ponto $x > 0$.* ***(b)*** *A solução encontrada quando estendida para $x \in \mathbb{R}$ possui paridade? Qual? Comente a sua resposta.*

Indicação: *Utilize a solução geral: $u(t,x) = F(x+vt) + G(x-vt)$ para $x - vt \geq 0$ e $x - vt < 0$, juntamente com a condição de fronteira no segundo caso.*

Exercício 3 (Valor 3.5) *Considere uma corda elástica percutida por um martelo convexo de largura 2δ cujo problema de valor inicial e de fronteira (PVIF) é dado por:*

$$\frac{1}{v^2}\,u_{tt} - u_{xx} = 0\,, \qquad t > 0\,,\, 0 < x < \pi$$

com

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0\,, \quad t > 0\,,$$

$u(0,x) = 0$, $0 \leq x \leq \pi$ e

$$u_t(0,x) = \begin{cases} A\cos\left(\pi(x-a)/2\delta\right) & \text{se} \quad |x-a| \leq \delta \\ 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < a-\delta \text{ e } a+\delta < x \leq \pi \end{cases}$$

onde a e δ são constantes positivas apropriadas e A real arbitrária. Utilize o método de Fourier para determinar a solução do PVIF, dada por

$$u(t,x) = \frac{8\delta A}{v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2 - 4\delta^2 n^2}\frac{\sin na\cos n\delta}{n}\sin nx \sin nvt\,.$$

Indicação: O cálculo dos coeficientes de Fourier é facilitado se a integral de Fourier for centrada, por uma mudança de variável, no ponto $x = a$.