

Segunda Prova de Física Matemática I – Soluções

(Equações a Derivadas Parciais, Transformada de Fourier e Polinômios ortogonais de Legendre)

IFUSP - 29 Junho 2015

Exercício 1 (Valor 3.0) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{|x|}{2\pi} + \frac{\sin |x|}{2\pi} \right) & \text{se } |x| \leq 2\pi \\ 0 & \text{se } |x| > 2\pi \end{cases}$$

Desejamos mostrar que a transformada de Fourier de $f(x)$ é

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin^2 \pi \xi}{\pi \xi^2 (1 - \xi^2)} . \quad (1)$$

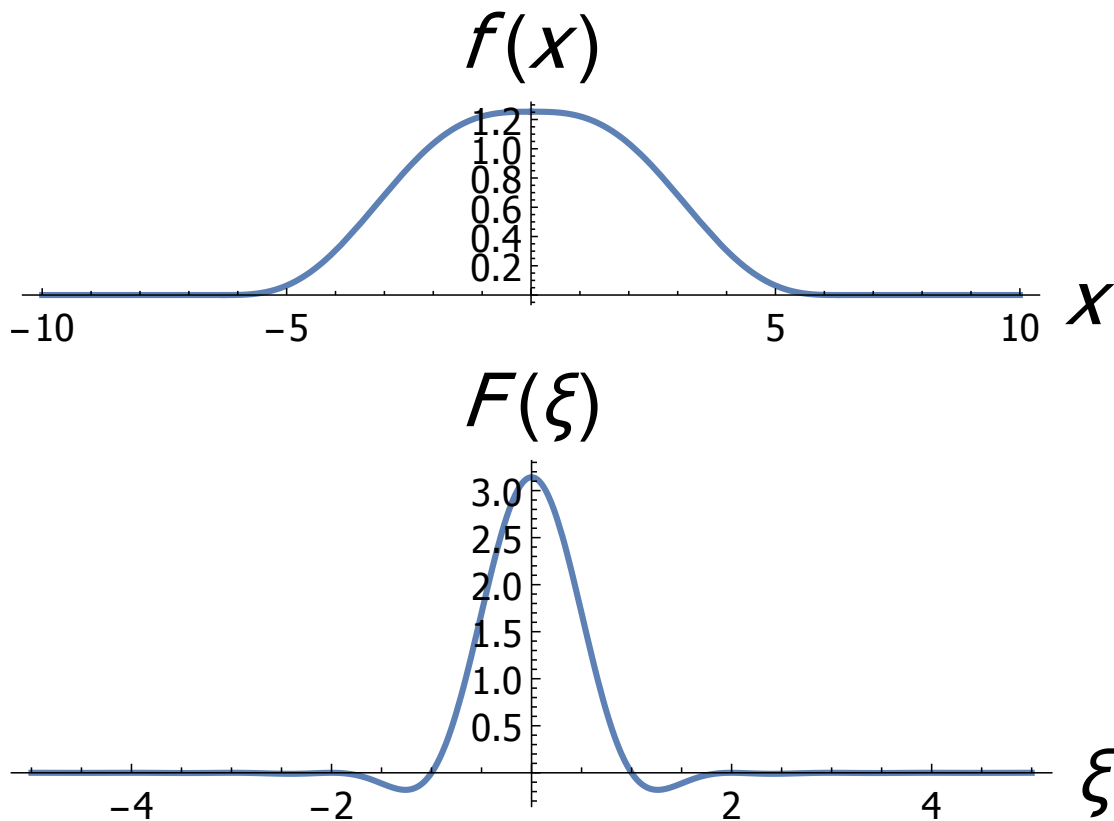


Figure 1: Gráfico das funções $f(x)$ e de $\hat{f}(x) = F(x)$

Seja $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ onde $f_1(x)$ e $f_2(x)$ é, respectivamente, a parte linear e senoidal de $f(x)$. Por linearidade, $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi) + \hat{f}_2(\xi)$. A transformada de Fourier de f_1 é (veja exercício

1.1 da lista 7):

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-2\pi}^{2\pi} \left(1 - \frac{|x|}{2\pi}\right) e^{-i\xi x} dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \cos \xi x dx \\
&= \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \frac{\sin \xi x}{\xi} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi\xi} \int_0^{2\pi} \sin \xi x dx \\
&= \frac{1}{2\pi\xi^2} (1 - \cos 2\pi\xi) \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \pi\xi}{\xi^2}.
\end{aligned} \tag{2}$$

onde na terceira igualdade usamos a fórmula de Euler $e^{-i\xi x} = \cos \xi x - i \sin \xi x$ e a paridade de $1 - |x|/2\pi$, na quarta integramos por partes e na sexta fizemos uso das identidades

$$\begin{aligned}
\cos 2\beta &= \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \quad e \\
\sin^2 \beta &= 1 - \cos^2 \beta,
\end{aligned}$$

para escrever $1 - \cos 2\pi\xi = 1 - \cos^2 \pi\xi + \sin^2 \pi\xi = 2 \sin^2 \pi\xi$

A transformada de Fourier de f_2 é

$$\begin{aligned}
\hat{f}_2(\xi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \sin |x| e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x \cos \xi x dx \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\sin(1+\xi)x + \sin(1-\xi)x) dx \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{1+\xi} (1 - \cos 2\pi(1+\xi)) + \frac{1}{1-\xi} (1 - \cos 2\pi(1-\xi)) \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{1+\xi} + \frac{1}{1-\xi} \right) (1 - \cos 2\pi\xi) \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \pi\xi}{1 - \xi^2}
\end{aligned} \tag{3}$$

onde, em adição aos argumentos utilizados no cálculo de $\hat{f}_1$, empregamos as seguintes identidades trigonométricas

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) ,$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

na terceira e quinta igualdades, sendo que a última implica em $\cos 2\pi(1 \pm \xi) = \cos 2\pi\xi$.

Adicionando (2) a (3) obtemos a função (1) desejada.

Exercício 2 (Valor 3.5) Considere o problema da condução de calor em uma barra infinita de difusibilidade térmica $\kappa = 1$, devido a um não-homogeneo:

$$u_t - u_{xx} - \alpha^2 u = e^{2\alpha^2 t} f(x) , \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} , \quad (4)$$

com $u(0, x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, onde $f(x)$ é tal que $\hat{f}(\xi) = \alpha\sqrt{2/\pi}$.

Tomando a transformada de Fourier da equação, juntamente com as propriedades de linearidade e $\widehat{u_{xx}} = i\xi\widehat{u_x} = -\xi^2\widehat{u}$,

$$\begin{aligned} u_t - \widehat{u_{xx}} - \alpha^2 u &= \widehat{u_t} - \widehat{u_{xx}} - \alpha^2 \widehat{u} \\ &= \widehat{u_t} + (\xi^2 - \alpha^2)\widehat{u} = e^{2\alpha^2 t} \hat{f}(\xi) \end{aligned} \quad (5)$$

obtemos uma equação ordinária para $\widehat{u}$ de primeira ordem em t , sujeita a condição inicial (a transformada de Fourier de uma função identicamente nula)

$$\widehat{u}(0, \xi) = 0 , \quad \xi \in \mathbb{R} . \quad (6)$$

A solução da equação

$$y' + ay = b(t) , \quad t > 0$$

$$y(0) = 0$$

é, pelo método da variação das constantes,

$$y(t) = \int_0^t e^{-a(t-s)} b(s) ds .$$

A solução do par de equações (5) e (6) para ξ fixo é, portanto,

$$\begin{aligned}
\hat{u}(t, \xi) &= \int_0^t e^{-(\xi^2 - \alpha^2)(t-s)} e^{2\alpha^2 s} \hat{f}(\xi) ds \\
&= \hat{f}(\xi) e^{-(\xi^2 - \alpha^2)t} \int_0^t e^{(\xi^2 + \alpha^2)s} ds \\
&= \hat{f}(\xi) e^{-(\xi^2 - \alpha^2)t} \frac{1}{\xi^2 + \alpha^2} \left(e^{(\xi^2 + \alpha^2)t} - 1 \right) \\
&= \hat{f}(\xi) \frac{1}{\xi^2 + \alpha^2} \left(e^{2\alpha^2 t} - e^{-(\xi^2 - \alpha^2)t} \right) \\
&= e^{2\alpha^2 t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\xi^2 + \alpha^2} - e^{\alpha^2 t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\xi^2 + \alpha^2} \cdot e^{-t\xi^2} \\
&= e^{2\alpha^2 t} \hat{h}(\xi) - e^{\alpha^2 t} \hat{h}(\xi) \cdot \hat{g}(t, \xi) , \tag{7}
\end{aligned}$$

onde na quinta e última igualdade usamos $\hat{f}(\xi) = a\sqrt{2/\pi}$, $\hat{h}(\xi) = \sqrt{2/\pi}a/(\xi^2 + a^2)$ e $\hat{g}(t, \xi) = e^{-\xi^2 t}$.

Para o primeiro termo de (7), a anti-transformada de Fourier de $\hat{h}(\xi)$ é

$$h(x) = e^{-|x|} .$$

Para o segundo termo de (7), a anti-transformada de Fourier de $\hat{h}(\xi) \cdot \hat{g}(t, \xi)$ é, pelo teorema da convolução: $\widehat{h * g} = \sqrt{2\pi} \hat{h} \cdot \hat{g}$ e dado que $\hat{g}(t, \xi)$ é a transformada de Fourier de $g(t, x) = (1/\sqrt{2t}) e^{-x^2/4t}$,

$$\begin{aligned}
\left(\hat{h} \cdot \hat{g}(t, \cdot) \right)^\vee &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h * g(t, x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-y)^2/(4t)} e^{-\alpha|y|} dy
\end{aligned}$$

de onde se conclui

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= (\hat{u}(t, \cdot))^\vee(x) \\
&= \left(e^{2\alpha^2 t} \hat{h} - e^{\alpha^2 t} \hat{h} \cdot \hat{g}(t, \cdot) \right)^\vee(x) \\
&= e^{2\alpha^2 t} (\hat{h})^\vee(x) - e^{\alpha^2 t} \left(\hat{h} \cdot \hat{g}(t, \cdot) \right)^\vee(x) \\
&= e^{2\alpha^2 t} h(x) - e^{\alpha^2 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h * g(t, x) \\
&= e^{2\alpha^2 t - \alpha|x|} - e^{\alpha^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-y)^2/(4t)} e^{-\alpha|y|} dy .
\end{aligned}$$

Exercício 3 (Valor 3.5) Considere um disco condutor de raio a uniformemente carregado com uma carga total q .

Para mostrar que o potencial ϕ produzido pelo disco, centrado na origem e sobre o plano xy , em um ponto do espaço $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, com $r = |\mathbf{x}| > a$ e θ é o ângulo entre o raio vetor $\mathbf{x}$ e o eixo z , é dado por

$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{2n}(0)}{n+1} \frac{a^{2n}}{r^{2n}} P_{2n}(\cos \theta) \quad (8)$$

onde $P_l(x)$ é o polinômio de Legendre de ordem l e

$$P_l(0) = \begin{cases} (-1)^{l/2} 2^{-l} l! / (l/2!)^2 & \text{se } l \text{ é par} \\ 0 & \text{se } l \text{ é ímpar} \end{cases}, \quad (9)$$

seguiremos o seguinte roteiro:

(i) Primeiramente, notemos que o problema eletrostático em questão satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^3 \setminus D,$$

onde $D = \{x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0\}$ é o lugar geométrico ocupado pelo disco condutor carregado. A solução geral do problema para $r > a$ é, pelo método de separação de variáveis,

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

Sob a condição que no infinito o potencial seja nulo os coeficientes A_l , $l = 0, 1, \dots$, devem se anular e

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta). \quad (10)$$

(ii) Para determinar os coeficientes B_l 's, calcularemos o potencial do disco em um ponto $(z, 0)$ sobre o eixo z . Para isso, integramos o potencial no ponto $(z, 0)$ devido aos anéis $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \rho + d\rho\}$ uniformemente carregados com a carga $dq = 2\pi\sigma\rho d\rho$ ($\sigma = q/(\pi a^2)$ é a densidade do disco)

$$\phi(z, 0) = \int_0^a \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}, \quad z > a$$

que, por sua vez, pode escrito em uma série de polinômios de Legendre, com o auxílio da função geratriz:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l.$$

Tomando $x = 0$ e $t = \rho/z$, temos

$$\begin{aligned}
\phi(z, 0) &= \int_0^a \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 z} \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2/z^2}} \\
&= \int_0^a \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 z} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(0) \frac{\rho^l}{z^l} \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 z} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{z^l} P_l(0) \int_0^a \rho^{l+1} d\rho \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 z} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{l+2}}{z^l(l+2)} P_l(0)
\end{aligned} \tag{11}$$

(a integração em $\rho \in [0, a]$ termo-a-termo pode ser realizada devido a convergência uniforme desta série em $0 \leq \rho/z \leq a/z \leq \delta$, para qualquer $0 < \delta < 1$).

(iii) Comparando os coeficientes da série integrada (11) com a série (10) da solução geral do item **(i)** no ponto $(z, 0)$, obtemos

$$\begin{aligned}
B_l &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{a^{l+2}}{(l+2)} \frac{P_l(0)}{P_l(1)} \\
&= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{a^l}{(l+2)} P_l(0)
\end{aligned} \tag{12}$$

devido a $P_l(1) = 1$, determinando a solução (8) em vista de (10), (12) e (9).