Terceira Prova de Física Matemática I

(Equações a Derivadas Parciais, Transformada de Fourier e Polinômios ortogonais de Legendre)

IFUSP - 29 Junho 2015 - 19:00 / 21:30 hs

Exercício 1 (Valor 3.0) *Mostre que a transformada de Fourier da função*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(1 - \dfrac{|x|}{2\pi} + \dfrac{\sin|x|}{2\pi}\right) & \text{se} \quad |x| \leq 2\pi \\ 0 & \text{se} \quad |x| > 2\pi \end{cases}$$

é

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin^2 \pi\xi}{\pi\xi^2(1-\xi^2)} \ .$$

Exercício 2 (Valor 3.5) *Use a transformada de Fourier para resolver o seguinte problema de condução de calor em uma barra infinita de difusibilidade térmica $\kappa = 1$:*

$$u_t - u_{xx} - \alpha^2 u = e^{2\alpha^2 t} f(x) \ , \qquad t > 0 \ , \ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

sujeita a condição inicial

$$u(0,x) = 0 \ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

com $f(x)$ a função cuja transformada de Fourier $\hat{f}(\xi)$ é constante igual a $\sqrt{2/\pi}\alpha$, onde $\alpha > 0$ aparece também no termo proporcional a u e na dependência temporal do lado direito de (1).

Indicação: $\hat{g}(\xi) = e^{-\xi^2 t}$ é a transformada de Fourier de $g(x) = e^{-x^2/4t}/\sqrt{2t}$ e $\hat{h}(\xi) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\alpha}{\xi^2+\alpha^2}$ é a transformada de Fourier de $h(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$.

Exercício 3 (Valor 3.5) *Considere um disco condutor de raio a uniformemente carregado com uma carga total q. Mostre que o potencial ϕ produzido pelo disco, centrado na origem e sobre o plano xy, em um ponto do espaço $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ com $r = |\mathbf{x}| > a$ é dado por*

$$\phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_{2n}(0)}{n+1}\frac{a^{2n}}{r^{2n}}P_{2n}(\cos\theta)$$

onde θ é o ângulo entre o raio vetor $\mathbf{x}$ e o eixo z e $P_l(x)$ é o polinômio de Legendre de ordem l, cujo valor em $x = 0$ é

$$P_l(0) = \begin{cases} (-1)^{l/2}2^{-l}l!/(l/2!)^2 & \textit{se} \quad l \ \textit{é par} \\ 0 & \textit{se} \quad l \ \textit{é ímpar} \end{cases} \ .$$

Indicação: O problema eletrostático em questão satisfaz a equação de Laplace $\nabla^2\phi = 0$ em todo espaço $\mathbb{R}^3$, excluindo o disco $D = \{x^2+y^2 \leq a^2, \ z = 0\}$. **(i)** Escreva a solução $\phi(r,\theta)$ geral do problema em uma série de polinômios ortogonais de Legendre para $r > a$, com a condição que no infinito o potencial seja nulo: $\phi(\infty,\theta) = 0$. **(ii)** Determine os coeficientes desta série, calculando o potencial do disco em um ponto $(z,0)$ sobre o eixo z. Para isso, integre termo-a-termo em $\rho \in [0,a]$ o potencial no ponto $(z,0)$ devido aos anéis $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \rho \leq \sqrt{x^2+y^2} < \rho + d\rho\right\}$ uniformemente carregados com a carga $dq = 2\pi\sigma\rho d\rho$ ($\sigma = q/(\pi a^2)$ é a densidade do disco):

$$\phi(z,0) = \int_0^a \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}} \ , \qquad z > a$$

escrito em séries de polinômios de Legendre, com o auxílio da função geratriz:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l$$

(a integração termo-a-termo pode ser realizada devido a convergência uniforme desta série em $-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq t \leq \delta$, para qualquer $0 < \delta < 1$). **(iii)** Compare os coeficientes da série integrada com a série da solução geral do ítem **(i)** no ponto $(z,0)$, determinando a solução.