Primeira Prova de Física Matemática I

(Equações a Derivadas Parciais e Séries de Fourier)

IFUSP - 8 de Outubro de 2018 - 10:00 / 12:30 hs

Exercício 1 (Valor 5.0) ***(i)*** *Escreva a série de Fourier $Sf(x)$ da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π–periódica, tal que*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad 0 \le x < \pi \\ -1 & se \quad -\pi \le x < 0 \end{cases} .$$

(ii) *Calcule, em seguida, a série de Fourier $SF(x)$ da função 2π –periódica,*

$$F(x) = \int_0^x f(y)\, dy$$

por integração da série termo-a-termo. ***(iii)*** *Justifique a igualdade $F(x) = SF(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$* ***(iv)*** *Use a identidade de Parseval para a função $F(x)$ e mostre que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96} .$$

(v) *Calcule a série de Fourier da função*

$$G(x) = \int_0^x \left(\frac{\pi}{2} - F(y) \right) dy$$

e verifique que é periódica de período 2π.

Exercício 2 (Valor 5.0) *A condução do calor em uma barra condutora de comprimento unitário e difusibilidade $\kappa = 1$ é governada pelo seguinte problema de valores inicial e de fronteira (PVIF):*

$$u_t - u_{xx} = \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} x , \tag{1}$$

em $R = \{(t,x) : t > 0 , 0 < x < 1\}$, com

$$u(t,0) = 0 \qquad e \qquad u(t,1) = 1 , \qquad t > 0 \tag{2}$$

e

$$u(0,x) = 0 , \qquad 0 \le x \le 1 . \tag{3}$$

(i) *Determine a temperatura estacionária $U = U(x)$. Para isso, resolva a equação (1) com $u_t = 0$ juntamente com as condições de fronteira (2);* ***(ii)*** *Escreva $u(t,x) = U(x) + w(t,x)$ e determine o PVIF para a função w;* ***(iii)*** *Resolva o PVIF para w pelo método de Fourier;* ***(iv)*** *Calcule os coeficientes de Fourier (apropriados) do dado inicial $w(0,x) = f(x)$ para a função w;* ***(v)*** *Verifique que $U(x)$ é a temperatura de equilíbrio: $\lim_{t\to\infty} (u(t,x) - U(x)) = 0$, $0 \le x \le 1$.*