Primeira Prova de Física Matemática I – Soluções

(Equações a Derivadas Parciais e Séries de Fourier)

IFUSP - 8 de Outubro de 2018

Exercício 1 (Valor 5.0) ***(i)*** *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, a função* 2π *–periódica tal que*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad 0 \leq x < \pi \\ -1 & se \quad -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

(isto é, $f(x)$ *coincide com a função sinal de* x*:* $\theta(x) = +1$ *se* $x \geq 0$ *e* $\theta(x) = -1$ *se* $x < 0$*, em* $(-\pi, \pi]$*). A série de Fourier* Sf *de* f *é*

$$Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

onde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \; dx \\ &= \frac{-2}{\pi n} \cos nx \big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n} (1 - \cos n\pi) \ . \end{aligned}$$

Portanto,

$$Sf(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx \tag{1}$$

ou

$$Sf(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x \ .$$

(ii) *A série de Fourier*

$$SF(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx \tag{2}$$

da função $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* 2π*–periódica par e tal que*

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(y) \, dy \\ &= \int_0^x \theta(y) \; dy = |x| \ , \qquad -\pi < x \leq \pi \end{aligned} \tag{3}$$

é dada pela integração de (1) termo-a-termo

$$SF(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} (1 - \cos nx) \ . \tag{4}$$

Logo, comparando (2) e (4) juntamente com (3), temos

$$A_n = \frac{-b_n}{n} = \frac{-2}{\pi n^2}(1-(-1)^n) \ , \tag{5}$$

para $n \geq 1$ *e, por definição,*

$$A_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \pi \ . \tag{6}$$

De onde se conclui que

$$|x| \ = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx \ , \qquad -\pi < x \leq \pi \ , \tag{7}$$

ou equivalentemente,

$$|x| \ = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x \ , \qquad -\pi < x \leq \pi \ ,$$

(iii) *Pelo Teorema sobre a integração de séries de Fourier (veja pág. 33 de "Análise de Fourier e EDPs", por Djairo G. de Figueiredo), a série de Fourier* $SF(x)$ *de* $F(x)$ *é dada pela integração de (1) termo-a-termo. Como* $f(x)$ *é seccionalmente contínua e como* $F'(x) = f(x)$ *nos pontos de continuidade de* f*, pelo teorema fundamental do cálculo, a função* $F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$ *é contínua, seccionalmente diferenciável e estas condições são suficientes para concluir a igualdade entre a série e a função, ponto a ponto,*

$$F(x) = SF(x) \ , \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ ,$$

pelo Teorema de Fourier.

Alternativamente, notamos que a série de Fourier $SF(x)$ *dada por (7) pode ser majorada pela séries numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$*,* $M_n = 4/(\pi n^2)$ *para* $n \geq 1$*, que é somável. Pelo teste* M *de Weierstrass, a séries trigonométrica* $SF(x)$*, de funções contínuas, é uniformemente convergente em cada intervalo fechado e limitado de* $\mathbb{R}$*. Pelo teorema de unicidade dos coeficientes de Fourier, existe uma única função contínua na reta,* 2π*–periódica, cujos coeficientes são dados por (5) para* $n \geq 1$ *e (6) e esta função deve ser necessariamente igual a* $F(x) = \min_{n\in\mathbb{Z}} |x - 2\pi n|$*.*

(iv) *Concluímos a partir da identidade de Parseval*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)^2 dx = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \ ,$$

de

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2 \ ,$$

devido a (3), e de

$$\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} \ ,$$

devido a (6) e (5), a relação almejada:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{16}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^4}{96} \ .$$

(v) *Integrando mais uma vez a série (7), termo-a-termo, obtemos que a função 2π–periódica e contínuamente diferenciável*

$$G(x) = \int_0^x \left(\frac{\pi}{2} - F(y)\right) dy \tag{8}$$

é ímpar, tal que

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x \left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy \\ &= \frac{x}{2}(\pi - x), \qquad 0 < x \leq \pi \end{aligned}$$

e sua série de Fourier

$$SG(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^3} \sin nx$$

satisfaz

$$\frac{x}{2}(\pi - x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin(2k-1)x, \qquad 0 < x \leq \pi \ .$$

Claramente, a função $SG(x)$ converge para a função $G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo por isso uma função periódica de período 2π. Note que o integrando $\pi/2 - F(y)$ de $G(x)$ em (8) subtrai o termo constante $A_0/2$ da série de Fourier SF de F, equação (2) juntamente com (6).

Exercício 2 (Valor 5.0) *Considere o seguinte problema de valores inicial e de fronteira (PVIF):*

$$u_t - u_{xx} = \alpha^2 \sin \alpha x \ , \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} \tag{9}$$

em $R = \{(t,x) : t > 0 \, , \, 0 < x < 1\}$, com

$$u(t,0) = 0 \qquad e \qquad u(t,1) = 1 \ , \qquad t > 0 \tag{10}$$

e

$$u(0,x) = 0 \ . \tag{11}$$

(i) *Vamos calcular a solução de (9) e (10), independente do tempo. Seja $U = U(x)$ a solução das seguintes equações*

$$-U'' = \alpha^2 \sin \alpha x \ , \tag{12}$$

e

$$U(0) = 0 \qquad e \qquad U(1) = 1 \ . \tag{13}$$

A solução geral de (12) é da forma

$$U(x) = U^{part}(x) + U^{\hom}(x)$$

onde $U^{part}(x)$ é uma solução particular de (12): $U^{part}(x) = \sin \alpha x$, por exemplo; $U^{\hom}(x)$ é a solução geral da equação homogênea $-U'' = 0$:[1]

$$U(x) = \sin \alpha x + a + bx \ .$$

[1] Alternativamente, obtemos a solução geral $U(x)$ por integração de (12): $U'(x) = \int -\alpha^2 \sin \alpha x \, dx = \alpha \cos \alpha x + b$ e $U(x) = \int (\alpha \cos \alpha x + b) \, dx = \sin \alpha x + bx + a$, onde a e b são constantes de integração arbitrárias.

Com $\alpha = \pi/2$, determinamos a e b pelas condições (13):

$$\begin{aligned} U(0) &= a = 0 \\ U(1) &= \sin \pi/2 + b = 1 + b = 1 \end{aligned}$$

cuja solução é $a = b = 0$, resultando na solução de equilíbrio

$$U(x) = \sin \pi x/2 \ .$$

(ii) *Escrevemos*

$$u(t,x) = U(x) + w(t,x) \ . \tag{14}$$

Substituindo (14) no PVIF original (eqs. (9), (10) e (11)), obtemos um PVIF para a função w:

$$w_t - w_{xx} = 0 \ , \tag{15}$$

em $R = \{(t,x) : t > 0 \, , \, 0 < x < 1\}$, com condição de fronteira homogênea

$$w(t,0) = w(t,1) = 0 \, , \qquad t > 0 \tag{16}$$

e inicial

$$w(0,x) = -U(x) = -\sin \pi x/2 \ . \tag{17}$$

(iii) *Aplicando o método de Fourier, as soluções de (15) e (16) da forma*

$$w(t,x) = T(t)X(x)$$

reduzem o PVIF para w em um par de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} T' + \lambda^2 T &= 0 \\ X'' + \lambda^2 X &= 0 \ , \qquad X(0) = X(1) = 0 \end{aligned}$$

cuja solução geral (na variável temporal)

$$T = Ce^{-\lambda^2 t}$$

e (na variável espacial)

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \, ,$$

juntamente com

$$\begin{aligned} X(0) &= A = 0 \\ X(1) &= B \sin \lambda = 0 \end{aligned}$$

resulta em uma coleção de autovalores e autofunções correspondentes

$$\begin{aligned} \lambda_n &= n\pi \\ X_n &= \sin n\pi x \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ . \end{aligned}$$

Segundo o princípio de superposição, a solução do problema é dada por uma combinação linear de soluções $w_n(t,x) = \exp(-n^2\pi^2 t)\sin n\pi x$*,* $n \in \mathbb{N}$*, de (15) e (16):*

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x \ . \tag{18}$$

(iv) *Os coeficientes* b_n*'s são determinados pela condição inicial (17):*

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x = f(x)$$

com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, a função* 2*–periódica, ímpar e tal que* $f(x) = -\sin \pi x/2$ *para* $0 \le x < \pi$*,*

$$\begin{aligned}
b_n &= -2\int_0^1 \sin \pi x/2 \ \sin n\pi x \ dx \\
&= -\int_0^1 \left(\cos(n-1/2)\pi x - \cos(n+1/2)\pi x\right) \ dx \\
&= -\left(\frac{1}{(n-1/2)\pi}\sin(n-1/2)\pi x - \frac{1}{(n+1/2)\pi}\sin(n+1/2)\pi x\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{-1}{(n^2-1/4)\pi}\left((n+1/2)\sin(n-1/2)\pi - (n-1/2)\sin(n+1/2)\pi\right) \\
&= \frac{-2n}{(n^2-1/4)\pi}\sin(n-1/2)\pi \ , \qquad (19)
\end{aligned}$$

resultando

$$b_n = \frac{-8n\sin(n-1/2)\pi}{(4n^2-1)\pi} \ . \tag{20}$$

Substituindo (18) e (20) em (14), concluímos

$$u(t,x) = \cos \pi x/2 - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin(n-1/2)\pi}{4n^2-1}e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x \ . \tag{21}$$

(v) *A temperatura de equilíbrio é atingida se* $w(x)$ *é o transiente da solução (21) do PVIF:*

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\left(u(t,x) - U(x)\right) &= \lim_{t\to\infty} w(t,x) \\
&= -\frac{8}{\pi}\lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin(n-1/2)\pi}{4n^2-1}e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x \\
&= -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin(n-1/2)\pi}{4n^2-1}\lim_{t\to\infty}e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x \ = 0
\end{aligned}$$

devido a convergência uniforme da série em (t,x)*, para* $t > 0$*, passamos o limite* $t \to \infty$ *para dentro do somatório.*