Segunda Prova de F ́ısica Matemática I

(Equaç ̃oes a Derivadas Parciais, Séries e Transformada de Fourier)

IFUSP - 6 Dezembro 2018 - 8:00 / 10:30 hs

Exerc ́ıcio 1 (Valor 4.0) i. Calcule a transformada de Fourier de

f2(x) =



√π2

sin|x|

2π se |x| ≤ 2π 0 se |x| > 2π

.

ii. Dado que fˆ1(ξ) = 1π

sin2 πξ

ξ2é a transformada de Fourier de f1(x) = √π/2 (1 − |x|/(2π)) se |x| ≤ 2π e 0 se |x| > 2π, mostre que a transformada de Fourier de f(x) = f1(x) + f2(x)é

f(ξ) ˆ= πξsin2(1 2 − πξ

ξ2) .

iii. Verifique que f(x)é cont ́ınuamente diferenciável e f(ξ)é ˆcont ́ınua e limitada, inclusive nos pontos ξ = ±1. iv. Use o teorema de Plancherel para encontrar o valor da integral

∫ ∞−∞

(1 sin− 4 ξπξ

2)2dξ = π4 2Exerc ́ıcio 2 (Valor 3.0) Resolva o problema de Cauchy para o movimento de uma corda elástica semi–infinita cujo o deslocamento transversal da corda u = u(t, x), em relaç ̃ao ao repouso, satisfaz

v12utt − uxx = 0, t > 0,x> 0 , (1)

com a extremidade em x = 0 fixa na posiç ̃ao de repouso: u(t,0) = 0, t > 0, e dados iniciais:

u(0,x) = e−x e ut(0,x) = sinx, x> 0 ;

i. para x − vt > 0 e ii. para x − vt < 0. iii. A soluç ̃ao encontrada quando estendida para x ∈ R possui paridade? Qual? Argumente!

Indicaç ̃ao: Utilize a soluç ̃ao geral: u(t, x) = F(x+vt)+G(x−vt) de (1) para x−vt < 0, juntamente com a condiç ̃ao de fronteira.

Exerc ́ıcio 3 (Valor 3.0) Use a transformada de Fourier para resolver o seguinte problema de conduç ̃ao de calor em uma barra infinita de difusibilidade térmica κ = 1:

ut − uxx − α2u = e2α2tf(x) , t > 0 , x ∈ R (2)

sujeita a condiç ̃ao inicial u(0,x)=0 com f(x) a funç ̃ao cuja transformada de Fourier f(ξ)é ˆ, constante x ∈ R

igual a √2/πα, onde α > 0 aparece também no termo proporcional a u e na dependência temporal do lado direito de (2). Para isso: i. Reescreva o problema da conduç ̃ao (1/√2π)∫ de ∞calor como um problema de valor inicial (PVI) de uma equaç ̃ao diferencial ordinária para ˆu(t, ξ) = −∞ u(t, x)e−iξxdx com ξ ∈ R fixo; ii. Resolva a equaç ̃ao como funç ̃ao de t e ξ; iii. Aplique a anti- tranformada de Fourier `a soluç ̃ao ˆu(t, ξ) do item ii. e encontre a soluç ̃ao do problema original. Empregue o teorema da convoluç ̃ao em um dos termos.

Indicaç ̃ao: A soluç ̃ao da equaç ̃ao diferencial ordinária y + ay = b(t), t > 0, com y(0) = 0 é y(t) =

∫ t0 e−a(t−s)b(s)ds. ˆφ(ξ) = e−ξ2t e h(ξ) ˆ=

√2π

α ξ2 + α2 s ̃ao transformada de Fourier de φ(x) = √12te−x2/4t e h(x) = e−α|x|, α > 0.