# Segunda Prova de Física Matemática I

(Equações a Derivadas Parciais, Séries e Transformada de Fourier)

**IFUSP - 6 Dezembro 2018 - 8:00 / 10:30 hs**

**Exercício 1 (Valor 4.0)** ***i.*** *Calcule a transformada de Fourier de*

$$f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{\sin|x|}{2\pi} & \text{se} \quad |x| \leq 2\pi \\ 0 & \text{se} \quad |x| > 2\pi \end{cases} .$$

***ii.*** *Dado que* $\hat{f}_1(\xi) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin^2 \pi\xi}{\xi^2}$ *é a transformada de Fourier de* $f_1(x) = \sqrt{\pi/2}\,(1 - |x|/(2\pi))$ *se* $|x| \leq 2\pi$ *e* $0$ *se* $|x| > 2\pi$*, mostre que a transformada de Fourier de* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ *é*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin^2 \pi\xi}{\pi\xi^2(1 - \xi^2)} .$$

***iii.*** *Verifique que* $f(x)$ *é contínuamente diferenciável e* $\hat{f}(\xi)$ *é contínua e limitada, inclusive nos pontos* $\xi = \pm 1$*.*
***iv.*** *Use o teorema de Plancherel para encontrar o valor da integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \pi\xi}{(1 - \xi^2)^2} d\xi = \frac{\pi^2}{4}$$

**Exercício 2 (Valor 3.0)** *Resolva o problema de Cauchy para o movimento de uma corda elástica semi–infinita cujo o deslocamento transversal da corda* $u = u(t, x)$*, em relação ao repouso, satisfaz*

$$\frac{1}{v^2}u_{tt} - u_{xx} = 0\,, \qquad t > 0\,,\, x > 0\ , \tag{1}$$

*com a extremidade em* $x = 0$ *fixa na posição de repouso:* $u(t, 0) = 0$*,* $t > 0$*, e dados iniciais:*

$$u(0, x) = e^{-x} \qquad \text{e} \qquad u_t(0, x) = \sin x\,, \qquad x > 0\ ;$$

***i.*** *para* $x - vt > 0$ *e* ***ii.*** *para* $x - vt < 0$*.* ***iii.*** *A solução encontrada quando estendida para* $x \in \mathbb{R}$ *possui paridade? Qual? Argumente!*

**Indicação:** Utilize a solução geral: $u(t, x) = F(x + vt) + G(x - vt)$ de (1) para $x - vt < 0$, juntamente com a condição de fronteira.

**Exercício 3 (Valor 3.0)** *Use a transformada de Fourier para resolver o seguinte problema de condução de calor em uma barra infinita de difusibilidade térmica* $\kappa = 1$*:*

$$u_t - u_{xx} - \alpha^2 u = e^{2\alpha^2 t} f(x)\ , \qquad t > 0\ ,\ x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

*sujeita a condição inicial*

$$u(0, x) = 0\ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

*com* $f(x)$ *a função cuja transformada de Fourier* $\hat{f}(\xi)$ *é constante igual a* $\sqrt{2/\pi}\alpha$*, onde* $\alpha > 0$ *aparece também no termo proporcional a* $u$ *e na dependência temporal do lado direito de (2). Para isso:* ***i.*** *Reescreva o problema da condução de calor como um problema de valor inicial (PVI) de uma equação diferencial ordinária para* $\hat{u}(t, \xi) = (1/\sqrt{2\pi})\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x)e^{-i\xi x}dx$ *com* $\xi \in \mathbb{R}$ *fixo;* ***ii.*** *Resolva a equação como função de* $t$ *e* $\xi$*;* ***iii.*** *Aplique a anti-tranformada de Fourier à solução* $\hat{u}(t, \xi)$ *do item* ***ii.*** *e encontre a solução do problema original. Empregue o teorema da convolução em um dos termos.*

**Indicação:** A solução da equação diferencial ordinária $y' + ay = b(t)$, $t > 0$, com $y(0) = 0$ é $y(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-a(t-s)}b(s)ds$. $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-\xi^2 t}$ e $\hat{h}(\xi) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\alpha}{\xi^2 + \alpha^2}$ são transformada de Fourier de $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2t}}e^{-x^2/4t}$ e $h(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$.