Segunda Prova de F ́ısica Matemática I – Soluç ̃oes (Equaç ̃oes a Derivadas Parciais, Séries e Transformada de Fourier) IFUSP - Dezembro 2018

Exerc ́ıcio 1 (Valor 4.0) Considere a funç ̃ao f : R −→ R ,

f(x) =



√π2

(1 − |x|

2π + sin|x|

2π

)

se |x| ≤ 2π

0 se |x| > 2π

dada por f(x) = f1(x)+f2(x) onde f1(x) e f2(x) s ̃ao, respectivamente, a parte linear e senoidal de f(x). Desejamos mostrar que

f(ξ) ˆ= sin2 πξ

πξ2(1 − ξ2) (1) é a transformada de Fourier de f(x) e que f (x) e f(ξ) ˆs ̃ao continuas e limitadas em R.

f (x)

1.2

1.0

0.8

0.6

0.4

0.2

-10 -5 f(ξ)

5 10 x

3.02.5

2.0

1.5

1.0

0.5

-4 -2 2 4 ξ

Figure 1: Gráfico das funç ̃oes f(x) e f(ξ).

ˆ1

i. A transformada de Fourier de fé dada por

f(ξ) ˆ= √12π

∫ ∞−∞ f(x)e−iξx dx

= 14π

∫ 2π

−2π sin|x|e−iξx dx

= 12π

∫ 2π

0 sinx cosξx dx

= 14π

∫ 2π

0 (sin(1 + ξ)x + sin(1 − ξ)x) dx

= 14π

( 1 + 1

ξ(1 − cos 2π(1 + ξ)) + 1 − 1

ξ(1 − cos 2π(1 − ξ)))

= 14π

( 1 + 1

ξ + 1 − 1

ξ)(1 − cos 2πξ)

= 1π

sin2 πξ 1 − ξ2 (2)

onde usamos a fórmula de Euler e−iξx = cosξx − isinξx e a paridade da funç ̃ao sin|x| para obter a terceira igualdade; na terceira e quinta igualdades empregamos as seguintes identidades trigonométricas

sinαcosβ = 12 (sin(α + β) + sin(α − β)) ,

cos (a ± b) = cosacosb ∓ sinasinb ,

sendo que a última implica em cos 2π(1 ± ξ) = cos 2πξ; na sexta fizemos uso das identidades

cos 2β = cos2 β − sin2 β e 1 − cos2 β = sin2 β ,

para escrever 1 − cos 2πξ = 1 − cos2 πξ + sin2 πξ = 2 sin2 πξ. ii. ffˆˆ1(ξ) 1(ξ) Dado que fˆ1(ξ) = + fˆ2(ξ), devido 1π

a (2).

sin2 πξ

ξ2é a transformada de Fourier de f1(x) e dado que f(ξ) ˆ= a linearidade da transformaç ̃ao, obtemos a funç ̃ao (1) desejada adicionando iii. A funç ̃ao f(x) em (−2π,2π)é a soma de duas funç ̃oes cont ́ınuas, f1(x) e f2(x), que se anulam nos pontos extremos x = ±2π do intervalo. Logo, f(x)é continua em (−2π,2π) e se anula nos pontos x = ±2π, os quais s ̃ao pontos de continuidade de f(x) pois f(x) = 0 se |x| > 2π.

2

Excluindo os pontos x = 0 e ±2π, f(x)é diferenciável e

f (x) =



√π2

(− 2π 1+ cosx

2π

) se 0 <x< 2π √π2

( 12π − cosx

2π

)

se −2π<x< 0

0 se |x| > 2π

é cont ́ınua. Nos pontos x = 0 e ±2π, tomando o limite pela direita e pela esquerda, temos

f (0+) = 0= f (0−)

f (2π+) = 0= f (2π−)

f (−2π+) = 0= f (−2π−) .

Logo, f (x)é cont ́ınua. Claramente, excluindo os pontos ξ = 0 e ξ = ±1, f(ξ)é ˆcont ́ınua e limitada. Nos pontos ξ = 0 e ξ = ±1, tomando os limites `a direita e `a esquerda e aplicando L’Hopital, temosξ→0 lim f(ξ) ˆ= ξ→0

lim (sin2 πξ)

π (ξ2(1 − ξ2)) = ξ→0

lim 2(ξ (sin − 2πξ)

2ξ3) = ξ→0

lim π 1 cos − 6ξ2πξ

2 = π

e

ξ→±1 lim f(ξ) ˆ= ξ→±1

lim (sin2 πξ)

π (ξ2(1 − ξ2)) = ξ→±1

lim sin 2πξ

2(ξ − 2ξ3) = 0 . De onde se conclui que f(ξ)é ˆcont ́ınua e limitada (veja Figura 1).

iv. Aplicando o teorema de Plancherel: f 2 =

∫ ∞−∞ |f(x)|2 dx =

∫ ∞−∞

∣∣∣ f(ξ)ˆ∣∣∣2 dξ =

∥∥∥ fˆ∥∥∥2 `a

funç ̃ao f2(x), temos

1π2

∫ ∞−∞

(1 sin− 4 ξπξ

2)2dξ = 18π

∫ 2π

sin2 |x| dx −2π = 14π ∫ 2π

0 sin2 x dx

= 18π

∫ 2π

0 (1 − cos 2x) dx

= 18π

(2π − sin 2

2x

)

= 14 ,

de onde se conclui ∫ ∞−∞

∣∣∣∣2π0

(1 sin− 4 ξπξ

2)2dξ = π24 .

3

Exerc ́ıcio 2 (Valor 3.0) Considere o problema de Cauchy (PVIF)

v12utt − uxx = 0, t > 0, x> 0, (3)

com u(t,0) = 0, t > 0, eu(0,x) = e−x e ut(0,x) = sinx, x> 0 . (4)

A soluç ̃ao geral de (3) é u(t, x) = F(x+vt)+G(x−vt), onde F (x) e G(x) s ̃ao funç ̃oes arbitrárias determinadas pelos dados inicias e de fronteira.

i. Para x − vt ≥ 0, temos

u(0,x) = F(x) + G(x) = e−x

ut(0,x) = v (F(x) − G(x)) = sinx . (5)

Integrando a segunda equaç ̃ao

F(x) − G(x) = −1v cosx + C onde Cé uma constante de integraç ̃ao. Resolvendo para F(x) e G(x), temos

F(x) = 12e−x − 2v 1cosx + C2 (6)

G(x) = 12e−x + 2v 1cosx − C2

resultando

u(t, x) = 12

(e−x+vt + e−x−vt) − 2v 1(cos (x + vt) − cos (x − vt))

= e−x coshvt + sinxsinvt . (7)

ii. Para x − vt < 0, usamos a condiç ̃ao de fronteira

u(t,0) = F(vt) + G(−vt)=0

que implica

G(−y) = −F(y) = −12e−y + 2v 1cosy − C2 para y > 0, devido a (6). De onde se conclui, juntamente com a soluç ̃ao geral e (6),

u(t, x) = F(x + vt) + G(−(vt − x))

= 12

(e−x−vt − e−vt+x) − 2v 1(cos (x + vt) − cos (vt − x))

= −e−vt sinhx + sinxsinvt . (8)

4

iii. Quanto a paridade das soluç ̃oes (7) e (8) com respeito a variável x, a primeira n ̃ao tem paridade alguma e a segunda é ́ımpar pois é uma combinaç ̃ao linear de duas funç ̃oes ́ımpares, sinhx e sinx. No caso i. a soluç ̃ao n ̃ao percebeu ainda a fronteira da corda semi–infinita em x = 0. Sob esta condiç ̃ao, devido a causalidade, o intervalo de influência [x−vt, x+vt], projetado sobre o eixo x pelo setor do passado associado ao ponto (t, x), n ̃ao pode conter a origem: x − vt > 0 implica x > vt ≥ 0. Por outro lado, no caso ii. a soluç ̃ao deve manter a origem em repouso, o que obriga tanto a soluç ̃ao (deslocamento da corda em relaç ̃ao ao repuso), quanto sua derivada em relaç ̃ao a t (velocidade da corda) terem paridade ́ımpar. Esta paridade é compat ́ıvel com o fenômeno f ́ısico de reflex ̃ao da onda ao atingir a fronteira da corda mantida fixa na origem.

Alternativamente, podemos escrever o PVIF original em R+ como um PVI em R estendendo os dados iniciais (5) como funç ̃oes ́ımpares (método das imagens):

f(x)  ̃= |x|xe−|x| =



e−x se x > 0 −ex se x < 0 0 se x = 0

e f(x)  ̃= sinx. A soluç ̃ao deste problema é dada pela fórmula de D’Alembert usual,

u(t, x) = 12

( x + |x + vt

vt|e−|x+vt| + |x x − − vt

vt|e−|x−vt|)

+ v 1sinxsinvt (9)

para todo t ≥ 0 e x ∈ R, reproduzindo o resultado anterior quando restrito a R+ × R+, em ambos casos x−vt ≥ 0 e x−vt < 0. Observe que n ̃ao é poss ́ıvel tomar x ≤ 0 e t > 0 na soluç ̃ao anterior (7) sem violar a condiç ̃ao x − vt ≥ 0. A express ̃ao (9) é ́ımpar por construç ̃ao.

Exerc ́ıcio 3 (Valor 3.0) Considere o problema da conduç ̃ao de calor em uma barra infinita de difusibilidade térmica κ = 1:

ut − uxx − α2u = e2α2tf(x), t > 0, x ∈ R , (10) com u(0,x)=0, x ∈ R, onde f(x)é tal que f(ξ) ˆ= α√2/π.

i. Transformando por Fourier a equaç ̃ao, juntamente com as propriedades de linearidade e ̂uxx = iξ ̂ux = −ξ2ˆu,

ut − ̂ uxx − α2u = ̂ut − ̂uxx − α2ˆu

= ˆut + (ξ2 − α2)ˆu = e2α2t f(ξ) ˆ(11)

obtemos uma equaç ̃ao diferencial ordinária para ˆu de primeira ordem em t, sujeita a condiç ̃ao inicial:

ˆu(0,ξ)=0 , ξ ∈ R . (12)

ii. A soluç ̃ao da equaç ̃ao

y + ay = b(t) , t > 0

y(0) = 05

é, pelo método da variaç ̃ao das constantes,

y(t) =

∫ t0 e−a(t−s)b(s) ds . (13)

Tomando y = ˆu, a = ξ2 − α2 e b(t) = e2α2t f(ξ) ˆem (13), a soluç ̃ao do PVI dado pelas equaç ̃oes (11) e (12), com ξ ∈ R fixo, é

ˆu(t, ξ) =

∫ t0 e−(ξ2−α2)(t−s)e2α2s f(ξ)ds ˆ= f(ξ)eˆ−(ξ2−α2)t ∫ t0 e(ξ2+α2)sds

= f(ξ)eˆ−(ξ2−α2)t 1

ξ2 + α2

(e(ξ2+α2)t − 1)

= f(ξ) ˆ1

ξ2 + α2

(e2α2t − e−(ξ2−α2)t)

= e2α2t√2π

α ξ2 + α2 − eα2t√2π

α ξ2 + α2 · e−tξ2

= e2α2tˆh(ξ) − eα2tˆh(ξ) · ˆφ(t, ξ) , (14) onde na quinta e última igualdade usamos f(ξ) ˆ= a√2/π, h(ξ) ˆ= √2/πa/(ξ2+a2) e ˆφ(t, ξ) = e−ξ2t.

iii. Para o primeiro termo de (14), a anti–transformada de Fourier de h(ξ)é

ˆh(x) = e−|x| .

Para o segundo termo da (1/√convoluç ̃ao: 2t)e−x2/4t,

h ̂∗ φ = de √(14), 2πˆh a anti–transformada · ˆφ e dado que de Fourier de ˆh(ξ) · ˆφ(t, ξ)é, pelo teorema ˆφ(t, ξ)é a transformada de Fourier de φ(t, x) = (ˆh · ˆφ(t,·))∨ = √12πh ∗ φ(t, x)

=

∫ ∞−∞

√4πt1e−(x−y)2/(4t)e−a|y|dy

6

de onde se conclui

u(t, x) = (ˆu(t,·))∨ (x)

=

(e2α2tˆh − eα2tˆh · ˆφ(t,·))∨ (x)

= e2α2t (hˆ)∨ (x) − eα2t (ˆh · ˆφ(t,·))∨ (x)

= e2α2th(x) − eα2t √12πh ∗ φ(t, x)

= e2α2t−α|x| − eα2t √4πt

1∫ ∞−∞ e−(x−y)2/(4t)e−α|y|dy .

7