Prova Substitutiva de Física Matemática I

(Série de Fourier, Transformada de Fourier e Equações Diferenciais Parciais)

IFUSP - 10 de Dezembro de 2018 - 10:00 / 12:30 h

Problema 1 (Valor 6.0) *Determine a solução do seguinte PVIF não-homogêneo:*

$$u_{tt} - u_{xx} = 0\,, \qquad t > 0\,,\, 0 < x < \pi$$

com

$$u(t,0) = e^{-t}\,, \qquad u(t,\pi) = 1\,, \quad t > 0 \tag{1}$$

e

$$u(0,x) = u_t(0,x) = 0\ , \qquad 0 < x < \pi\ ,$$

pelo método de variação dos parâmetros. Para isso: ***i.*** *Escreva $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$, onde $v(t,x)$ é uma função linear de x em $(0,\pi)$ satisfazendo (1), e determine o PVIF satisfeito por $w(t,x)$;* ***ii.*** *Escreva a solução do novo PVIF na forma $w(t,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin nx$ e determine a equação satisfeita para os c_n's juntamente com suas condições iniciais.* ***iii.*** *A solução geral da equação ordinária para os c_n's é dada por*

$$c_n(t) = c_n^{\mathrm{hom}}(t) + c_n^{\mathrm{part}}(t) = a_n\cos nt + b_n\frac{\sin nt}{n} + Ae^{-t}\ .$$

Determine A, a_n e b_n em termos das constantes que definem o problema de valor inicial no ítem ***ii.**. **iv.*** *Escreva a solução do PVIF original.*

Dado: Se $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é uma função 2π–periódica, ímpar e tal que $f(x) = A + Bx$ em $(0,\pi)$, então $Sf(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$ tem coeficientes de Fourier $b_n = 2A(1-(-1)^n)/(\pi n) - 2B(-1)^n/n$.

Problema 2 (Valor 4.0) *Use a transformada de Fourier para mostrar que o núcleo integral de Fejér*

$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)e^{inx}$$

pode ser escrito como: $F_N(2\pi k) = N$, se $k\in\mathbb{Z}$ e

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin Nx/2}{\sin x/2}\right)^2\ , \qquad \text{se}\ \ \frac{x}{2\pi}\notin\mathbb{Z}\ . \tag{2}$$

Para isso: ***(i)*** *Calcule a anti–transformada de Fourier $f(x)$ de*

$$\hat f(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(1 - \dfrac{|\xi|}{2a}\right) & \text{se}\ \ |\xi|\le 2a \\ 0 & \text{se}\ \ |\xi| > 2a \end{cases}\ ;$$

(ii) *Use a fórmula de Poisson*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat f(n)e^{inx} \tag{3}$$

com f e $\hat f$ dados pelo ítem ***(i)*** *com $a = 1/2$ para obter a igualdade*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(k + x/(2\pi))^2} = \left(\frac{\pi}{\sin x/2}\right)^2\ ; \tag{4}$$

(iii) *Use novamente a fórmula de Poisson (3) com f e $\hat f$ dados pelo ítem* ***(i)*** *com $a = N/2$, juntamente com (4) para estabelecer (2).*