Prova Substitutiva de Física Matemática I – Soluções

(Séries e Transformadas de Fourier em Equações a Derivadas Parciais)

IFUSP - Dezembro de 2018

Problema 1 (Valor 6.0) *Considere o PVIF:*

$$u_{tt} - u_{xx} = 0\,, \qquad t > 0\,,\, 0 < x < \pi \tag{1}$$

com

$$u(t,0) = e^{-t}\,, \qquad u(t,\pi) = 1\,, \quad t > 0 \tag{2}$$

e

$$u(0,x) = u_t(0,x) = 0\ , \qquad 0 < x < \pi\ . \tag{3}$$

i. *Seja*

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) \tag{4}$$

onde

$$v(t,x) = \frac{x}{\pi} + \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)e^{-t} \tag{5}$$

é a uma função linear em x que interpola os valores de u na fronteira do intervalo $(0,\pi)$ para $t > 0$. Diferenciando (4) uma e duas vezes em relação a t e duas vezes em relação a x, obtemos

$$\begin{aligned}
u_t &= v_t + w_t = -\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)e^{-t} + w_t \\
u_{tt} &= v_{tt} + w_{tt} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)e^{-t} + w_{tt} \\
u_{xx} &= v_{xx} + w_{xx} = w_{xx}
\end{aligned}$$

que juntamente com as equações (1), (2) e (3) substitui o PVIF original para u por outro PVIF para w:

$$\begin{aligned}
w_{tt} - w_{xx} &= \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)e^{-t}\ , \qquad t > 0\,,\, 0 < x < \pi \\
w(t,0) &= w(t,\pi) = 0\ , \qquad t > 0
\end{aligned} \tag{6}$$

com os dados iniciais

$$\begin{aligned}
w(0,x) &= -1 \\
w_t(0,x) &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right), \qquad 0 < x < \pi\ .
\end{aligned} \tag{7}$$

ii. *Uma solução das equações (6) e (7), pelo método da variação dos parâmetros, é da forma*

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin nx \tag{8}$$

onde os c_n, substituindo (8) em (6), juntamente com as expansões

$$\left(\frac{x}{\pi}-1\right)e^{-t} = e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n \sin nx$$

$$1-\frac{x}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \sin nx$$

$$-1 = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \sin nx \ ,$$

fazendo uso do "Dado" a este problema,

$$A+Bx = \sum_{n=1}^{\infty}B_n \sin nx \ ,$$

$$B_n = \frac{2A(1-(-1)^n)}{\pi n}-\frac{2B(-1)^n}{n} \ , \tag{9}$$

satisfazem as equações

$$c_n''+n^2c_n=\gamma_n e^{-t} \tag{10}$$

com ($A=-1$ e $B=1/\pi$ na eq. (9))

$$\gamma_n=\frac{-2}{\pi n} \tag{11}$$

e dados iniciais ($A=-1$ e $B=0$ e, respectivamente, $A=1$ e $B=-1/\pi$ na eq. (9))

$$c_n(0) = \alpha_n=\frac{-2}{\pi n}(1-(-1)^n) \tag{12}$$

$$c_n'(0) = \beta_n=\frac{2}{\pi n} \ . \tag{13}$$

iii. *A solução geral da equação $c''+n^2c=\gamma e^{-t}$, com $c(0)=\alpha$, $c'(0)=\beta$ e $n\neq 0$, dado que uma solução particular é da forma Ae^{-t} e $\cos nx$ e $\sin nx$ são duas soluções L.I. da equação homogênea, é da forma*

$$c(t)=a\cos nt+b\frac{\sin nt}{n}+Ae^{-t} \tag{14}$$

onde, com os índices n omitidos por simplicidade, a, b e A devem ser determinados em termos de α, β, γ. (14) substituida na equação (10),

$$A(1+n^2)e^{-t}=\gamma e^{-t} \ ,$$

determina a constante

$$A=\frac{\gamma}{1+n^2} \tag{15}$$

e,consequentemente, Ae^{-t} é uma solução particular da equação. Substituindo (15) em (14) e em sua derivada:

$$c(t)=a\cos nt+b\frac{\sin nt}{n}+\frac{\gamma}{1+n^2}\ e^{-t}$$

e

$$c'(t)=-an\sin nt+b\cos nt-\frac{\gamma}{1+n^2}\ e^{-t} \ ,$$

as equações para os dados iniciais

$$\begin{aligned} c(0) &= a + \frac{\gamma}{1+n^2} = \alpha \\ c'(0) &= b - \frac{\gamma}{1+n^2} = \beta \end{aligned}$$

determinam

$$\begin{aligned} a &= \alpha - \frac{\gamma}{1+n^2}\ , \\ b &= \beta + \frac{\gamma}{1+n^2} \end{aligned}$$

e a solução do problema

$$c(t) = \left(\alpha - \frac{\gamma}{1+n^2}\right)\cos nt + \left(\beta + \frac{\gamma}{1+n^2}\right)\frac{\sin nt}{n} + \frac{\gamma}{1+n^2}\ e^{-t}\ . \tag{16}$$

iv. *Substituindo em (16) os coeficientes α_n, β_n e γ_n calculados em (12), (13) e (11), obtemos*

$$\begin{aligned} c_n(t) &= \frac{-2}{\pi n}\left(1-(-1)^n - \frac{1}{1+n^2}\right)\cos nt + \frac{2}{\pi n}\left(1 - \frac{1}{1+n^2}\right)\frac{\sin nt}{n} - \frac{2}{\pi n}\frac{1}{1+n^2}e^{-t} \\ &= \frac{2}{\pi n}\frac{1}{1+n^2}\left(\left((-1)^n(1+n^2) - n^2\right)\cos nt + n\sin nt - e^{-t}\right)\ . \end{aligned} \tag{17}$$

A solução do PVIF original é, por (4), (5), (8) e (17),

$$u(t,x) = \frac{x}{\pi} + \left(1-\frac{x}{\pi}\right)e^{-t} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+n^2)}\left(\left((-1)^n(1+n^2)-n^2\right)\cos nt + n\sin nt - e^{-t}\right)\sin nx\ .$$

Exercício 2 (Valor 4.0) *Para mostrar que o núcleo integral de Fejér*

$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e^{inx}$$

pode ser escrito como

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin Nx/2}{\sin x/2}\right)^2\ , \tag{18}$$

para $x/2\pi \notin \mathbb{Z}$, seguiremos os seguintes passos:

(i) *A anti–transformada de Fourier de*

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(1-\dfrac{|\xi|}{2a}\right) & se \quad |\xi| \le 2a \\ 0 & se \quad |\xi| > 2a \end{cases} \tag{19}$$

é dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\ d\xi \\ &= \frac{1}{2}\int_{-2a}^{2a}\left(1-\frac{|\xi|}{2a}\right)e^{i\xi x}\ d\xi \\ &= \int_{0}^{2a}\left(1-\frac{\xi}{2a}\right)\cos\xi x\ d\xi \\ &= \left(1-\frac{\xi}{2a}\right)\frac{\sin\xi x}{x}\bigg|_0^{2a}+\frac{1}{2ax}\int_0^{2a}\sin\xi x\ d\xi \\ &= \frac{1}{2ax^2}\left(1-\cos 2ax\right) \\ &= a\frac{\sin^2 ax}{(ax)^2}\ , \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos a fórmula de Euler $e^{i\xi x}=\cos\xi x+i\sin\xi x$ *e o fato da integral da função ímpar* $i\left(1-|\xi|/(2a)\right)\sin\xi x$ *no intervalo simétrico* $[-2a,2a]$ *ser nula; na última igualdade usamos* $\cos 2ax=\cos^2 ax-\sin^2 ax=1-2\sin^2 ax$.

(ii) *Aplicando a fórmula de Poisson*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(x+2\pi k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx} \tag{20}$$

com f *e* $\hat{f}$ *dados pelo ítem* ***(i)*** *com* $a=1/2$, *obtemos*

$$2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(x+2\pi k)/2}{(x+2\pi k)^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2} \tag{21}$$

devido ao fato que o único termo não nulo no lado direito da igualdade (20) é o de $n=0$. *Observe que* $\hat{f}(\xi)$ *dada por (19) com* $a=1/2$, *é uma função contínua e se anula para* $|\xi|\geq 1$. *Usando*

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}+\pi k\right)=\left(\sin\frac{x}{2}\cos k\pi\right)^2=\sin^2\frac{x}{2}$$

no lado esquerdo de (21), obtemos a igualdade

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(k+x/(2\pi)\right)^2}=\left(\frac{\pi}{\sin x/2}\right)^2\ ; \tag{22}$$

(iii) *Aplicando novamente a fórmula de Poisson (20) com* f *e* $\hat{f}$ *dados pelo ítem* ***(i)*** *com* $a=N/2$, *juntamente com (22) e*

$$\sin^2\left(\frac{Nx}{2}+\pi Nk\right)=\left(\sin\frac{Nx}{2}\cos kN\pi\right)^2=\sin^2\frac{Nx}{2}\ ,$$

temos para o lado esquerdo de (20)

$$
\begin{aligned}
2N \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(Nx + 2\pi Nk)/2}{(Nx + 2\pi Nk)^2} &= \frac{1}{2\pi^2 N} \sin^2 Nx/2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k + x/(2\pi))^2} \\
&= \frac{1}{2N} \frac{\sin^2 Nx/2}{\sin^2 x/2} \qquad (23)
\end{aligned}
$$

e para o lado direito de (20), devido a $\hat{f}(\xi)$ se anular para $|\xi| > N$,

$$
\frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{inx} = \frac{1}{2} F_N(x)\,. \qquad (24)
$$

Igualando (23) e (24) obtemos a expressão (18) desejada.

Observe que (23) e (24) são funções periódicas de período 2π e que (23) está bem definida em todo interval $(-\pi, \pi)$ com exceção de $x = 0$. Para mostrar que $F_N(2\pi k) = N$, $k \in \mathbb{N}$, basta então examinar (23) (multiplicada por 2) no limite em que x tende a 0. Por L'Hopital, temos

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{N} \frac{\sin^2 Nx/2}{\sin^2 x/2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{N} \frac{\left(\sin^2 Nx/2\right)'}{\left(\sin^2 x/2\right)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{N} \frac{N \sin Nx/2 \cos Nx/2}{\sin x/2 \cos x/2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{N} \frac{N\,(\sin Nx)'}{(\sin x)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{N} \frac{N^2 \cos Nx}{\cos x} = N\ .
\end{aligned}
$$