Quinta Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Equações a Derivadas Parciais, Séries de Fourier e Equação da Energia)

IFUSP - 20 de Maio 2019

Exercício 1 (Corda percutida por martelo convexo) *Considere o seguinte PVIF:*

$$\frac{1}{v^2}\,u_{tt} - u_{xx} = 0\,, \tag{1}$$

em $R = \{t > 0\,,\, 0 < x < \pi\}$*, com condição de fronteira*

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0\,, \tag{2}$$

para $t > 0$*, e iniciais*

$$\begin{aligned} u(0,x) &= f(x) = 0\ , \qquad 0 \le x \le \pi \\ u_t(0,x) &= g(x) = \begin{cases} A\sin\dfrac{\pi}{\delta}(x-a) & \text{se}\quad a \le x \le a+\delta \\ 0 & \text{se}\quad 0 \le x < a\ \ e\ a+\delta < x \le \pi \end{cases}\ , \end{aligned} \tag{3}$$

onde a *e* δ *são reais positivos tais que* $0 < a < \pi - \delta$*. A solução das equações (1) e (2), obtida pelo método de Fourier é da forma*

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin nx \tag{4}$$

com as funções dependentes do tempo dadas por

$$c_n(t) = b_n\cos nvt + d_n\sin nvt\ . \tag{5}$$

Devido as condições iniciais, (4) e (5) juntamente com as primeiras igualdades de (3) resultam em

$$\begin{aligned} u(0,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0)\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx = f(x) \\ u_t(0,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(0)\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} nvd_n\sin nx = g(x)\ , \end{aligned}$$

com os coeficientes b_n*'s e* d_n*'s de Fourier determinados pelas fórmulas*

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\ dx = 0\ , \tag{6}$$

$$\begin{aligned} nvd_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin nx\ dx \\ &= \frac{2A}{\pi}\int_a^{a+\delta}\sin\frac{\pi}{\delta}(x-a)\sin nx\ dx\ , \qquad n\in\mathbb{N} \end{aligned} \tag{7}$$

aplicadas às funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π *–periódicas, ímpares e dadas por (3) em* $[0, \pi]$. *Usando em (7) a relação trigonométrica*

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(-\cos\left(\alpha+\beta\right) + \cos(\alpha-\beta)\right) \ ,$$

obtemos

$$\begin{aligned} nvd_n &= \frac{A}{\pi}\int_a^{a+\delta}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{\delta}(x-a)+nx\right)+\cos\left(\frac{\pi}{\delta}(x-a)-nx\right)\right)\, dx \\ &= \frac{A}{\pi}\left[\frac{-1}{\pi/\delta+n}\sin\left(\frac{\pi}{\delta}(x-a)+nx\right)+\frac{1}{\pi/\delta-n}\sin\left(\frac{\pi}{\delta}(x-a)-nx\right)\right]_a^{a+\delta} \\ &= \frac{A}{\pi}\left[\frac{-1}{\pi/\delta+n}\left(\sin\left(\pi+n(a+\delta)\right)-\sin na\right)+\frac{1}{\pi/\delta-n}\left(\sin\left(\pi-n(a+\delta)\right)+\sin na\right)\right] \ . \end{aligned}$$

Usando as relações trigonométricas

$$\sin\left(\pi \pm n(a+\delta)\right) = \pm\cos\pi\sin n\left(a+\delta\right) = \mp\sin n\left(a+\delta\right)$$

e

$$\sin n\left(a+\delta\right)+\sin na = \sin n((a+\delta/2)+\delta/2)+\sin n((a+\delta/2)-\delta/2) = 2\sin n\left(a+\delta/2\right)\cos\delta/2$$

obtemos na sequência

$$\begin{aligned} nvd_n &= \frac{A}{\pi}\left(\frac{1}{\pi/\delta+n}+\frac{1}{\pi/\delta-n}\right)(\sin n(a+\delta)+\sin na) \\ &= \frac{2A}{\pi}\frac{\pi/\delta}{\pi^2/\delta^2-n^2}\left(\sin n(a+\delta)+\sin na\right) \\ &= \frac{4\delta A}{\pi^2-\delta^2 n^2}\sin n\left(a+\delta/2\right)\cos\delta/2 \end{aligned}$$

de onde se conclui, juntamente com (4), (5) e (6), o resultado desejado:

$$u(t,x) = \frac{4\delta A}{v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\delta A}{\pi^2-\delta^2 n^2}\sin n\left(a+\delta/2\right)\cos\delta/2\sin nx\,\sin nvt\,. \tag{8}$$

Observe que a função g *é contínua e sua série de Fourier* $Sg(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(n\pi v/L)\, d_n\sin nx$ *converge uniformemente para* g *em* $[0,\pi]$ *pelo teste* M *de Weierstrass e unicidade dos coeficientes de Fourier. A série de* $u(t,x)$ *converge uniformemente em* $\bar{R}$ *para uma função da classe* C^1 *que, por sua vez, é solução do PVIF no sentido generalizado – uma solução* $u(t,x)$ *de (1), (2) e (3) no sentido estrito (veja Teorema 5.1, pág. 137 do livro texto de Djairo G. de Figueiredo) requer que* g' *seja contínua e* g'' *seccionalmente contínua em* $[0,\pi]$.

Como visto recentemente em aula, a fórmula de D'Alembert

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x+vt)+f(x-vt)\right)+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}g(y)dy$$

é solução do PVIF, equações (1), (2) e (3), contanto que os dados iniciais $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sejam funções 2π–periódicas, ímpares e tais que em $[0, \pi]$ coincidam com as funções definidas em (3). O método de Fourier já havia solicitado a extensão dos dados iniciais para a reta. Assumindo que a solução de (1), (2) e (3) seja única (pela conservação de energia) e como $f \equiv 0$, a solução do PVIF é

$$u(t, x) = \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(y)dy$$

com g dada por (3).

Tentem explicar por intermédio desta fórmula (com g uma função 2π –periódica e ímpar) o comportamento de sua solução. Note, em particular, o atraso em reverter o sinal do deslocamento da corda (o sinal é invertido bem depois da onda ter atingido a fronteira no menor t tal que $[a - \delta - vt, a + \delta + vt] \cap \{0, \pi\} \neq \emptyset$). Note que, pela fórmula de D'alembert e pela equação (8), $u(t, x) \equiv 0$ nos múltiplos inteiros de π/v (por que?).

Exercício 2 *Para obter a equação da energia do PVIF:*

$$\frac{1}{v^2}\, u_{tt} - u_{xx} + ku = 0 \ , \tag{9}$$

em $R = \{(t, x) : t > 0\, , \, 0 < x < L\}$, sujeita às condições de fronteira

$$u_x(t, 0) = u(t, L) = 0\, , \qquad t > 0 \tag{10}$$

e iniciais

$$u(0, x) = f(x) \qquad \text{e} \qquad u_t(0, x) = g(x)\, , \qquad 0 \leq x \leq L \tag{11}$$

com $k \geq 0$, procedemos da seguinte maneira.

Recorde que $v^2 = \tau/\rho$, onde ρ e τ são a densidade (linear) e a tensão da corda em repouso, se mantém constante durante o movimento. Vamos assumir que u é uma solução no sentido estrito do PVIF. Sendo u da classe C^1 em $\bar{R}$ e da classe C^2 em R, satisfazendo o PVIF, a equação (9) multiplicada por τu_t pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
0 &= \rho u_{tt} u_t - \tau u_{xx} u_t + k\tau u u_t \\
&= \rho u_{tt} u_t + \tau u_{xt} u_x + k\tau u u_t - \tau \left(u_{xt} u_x + u_{xx} u_t \right) \\
&= \frac{\rho}{2} \left(u_t^2 \right)_t + \frac{\tau}{2} \left(u_x^2 \right)_t + \frac{k\tau}{2} \left(u^2 \right)_t - \tau \left(u_x u_{tx} + u_{xx} u_t \right) \\
&= \frac{\rho}{2} \left(u_t^2 \right)_t + \frac{\tau}{2} \left(u_x^2 \right)_t + \frac{k\tau}{2} \left(u^2 \right)_t - \tau \left(u_x u_t \right)_x
\end{aligned}$$

Integrando em x sobre o intervalo $[0, L]$, resulta

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^L \left(\rho u_{tt} u_t - \tau u_{xx} u_t + k\tau u u_t \right) dx \\
&= \int_0^L \left(\frac{\rho}{2} \left(u_t^2 \right)_t + \frac{\tau}{2} \left(u_x^2 \right)_t + \frac{k\tau}{2} \left(u^2 \right)_t - \tau \left(u_x u_t \right)_x \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\rho u_t^2 + \tau u_x^2 + k\tau u^2 \right)_t dx - \tau \left. u_x u_t \right|_0^L \qquad (12)
\end{aligned}$$

devido o teorema fundamental do cálculo aplicado ao último termo. Sendo o integrando da expressão acima uma função contínua em R e integrável em $[0,L]$, a derivada com respeito a t pode ser tomada fora da integral. Usando (10), como $u(t,L)$ é mantido na posição de repouso, $u_t(t,L)=0$ e o termo de fronteira se anula

$$-\tau\, u_x u_t\big|_0^L = \tau\left(u_x(t,0)u_t(t,0) - u_x(t,L)u_t(t,L)\right) = 0 \qquad (13)$$

para todos instantes $t>0$. As equações (12) e (13) juntas resultam em

$$\frac{dE}{dt}(t) = 0$$

onde a energia da corda

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\rho u_t^2 + \tau u_x^2 + k\tau u^2\right) dx \qquad (14)$$

é uma quantidade conservada pelo movimento e, portanto, pode ser escrita em termos dos dados iniciais (11) do problema:

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\rho g(x)^2 + \tau f'(x)^2 + k\tau f(x)^2\right) dx\ . \qquad (15)$$

Admitindo a existência de uma solução $u(t,x)$ do PVIF no sentido estrito, vamos provar que ela é única. Supondo que haja duas possíveis soluções do PVIF $u^1(t,x)$ e $u^2(t,x)$, a diferença

$$w(t,x) = u^1(t,x) - u^2(t,x)$$

satisfaz o PVIF, equações (9), (10) com (11) substituído pelo dado inicial trivial:

$$\frac{1}{v^2}\, w_{tt} - w_{xx} + kw = 0\ ,$$

em $R = \{(t,x) : t>0\,,\ 0<x<L\}$,

$$w_x(t,0) = w(t,L) = 0\,, \qquad t>0$$

e

$$w(0,x) = 0 \qquad \text{e} \qquad w_t(0,x) = 0\,, \qquad 0 \le x \le L\ .$$

A quantidade $E(t)$ deste problema, devido sua conservação e a (15), satisfaz

$$E(t) = E(0) = 0$$

de onde se conclui, tendo em vista (14),

$$\frac{1}{2}\int_0^L \left(\rho w_t^2 + \tau w_x^2 + k\tau w^2\right) dx = 0\ .$$

Devido a continuidade e positividade do integrando em R e positividade do termo de fronteira,

$$\begin{aligned} w_t(t,x) &= w_x(t,x) = w(t,x) = 0\ , \qquad t>0\ ,\ 0<x<L \\ w_x(t,0) &= w(t,L) = 0, \qquad t>0 \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$w(t,x) = 0\ , \qquad t>0\ ,\ 0<x\le L\ .$$

De onde se conclui, devido a continuidade de $w(t,x)$ em $\bar{R}$, a contradição:

$$w(t,x) = u^1(t,x) - u^2(t,x) = 0\ , \qquad \text{em}\ \ \bar{R}\ ,$$

a saber, caso exista, $u(t,x)$ é a única solução do PVIF definido pelas equações (9), (10) e (11).