

Quinta Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Equações a Derivadas Parciais, Séries de Fourier e Equação da Energia)

IFUSP - Maio 2019

Exercício 1 (Corda percutida por martelo convexo) Considere uma corda elástica percutida por um martelo convexo de largura δ cujo problema de valor inicial e de fronteira (PVIF) é dado por:

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > 0, 0 < x < \pi$$

com

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \text{ e}$$

$$u_t(0, x) = \begin{cases} A \sin(\pi(x-a)/\delta) & \text{se } a \leq x \leq a + \delta \\ 0 & \text{se } 0 \leq x < a \text{ e } a + \delta < x \leq \pi \end{cases}$$

onde a e δ são constantes positivas compatíveis e A um real arbitrário. Utilize o método de Fourier para determinar a solução do PVIF, dada por

$$u(t, x) = \frac{4\delta A}{v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 - \delta^2 n^2} \frac{\sin n(a + \delta/2) \cos n\delta/2}{n} \sin nvt \sin nx.$$

Indicação: Utilize a relação trigonométrica: $\sin \alpha \sin \beta = (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))/2$ no cálculo dos coeficientes de Fourier.

Exercício 2 Obtenha a equação da energia para o PVIF:

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = -ku,$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < L\}$, sujeita às condições de fronteira

$$u_x(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad t > 0$$

e iniciais

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

com k uma constante positiva. Demonstre a seguir que a solução deste problema, admitindo sua existência, é única.

Indicação: Encontre a função energia $E(t)$ da corda vibrante que se conserva no tempo: $(dE/dt)(t) = 0$ e utilize sua conservação para demonstrar a unicidade do PVIF.