

Sexta Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Fórmula de D'Alembert e Oscilações Forçadas)

IFUSP - 30 de Maio 2019

Exercício 1 (Corda semi-infinita) Considere o seguinte PIVF:

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad (1)$$

em $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0, x > 0\}$, sujeita à condição de fronteira

$$u_x(t, 0) = e^{-t}, \quad t > 0, \quad (2)$$

e iniciais

$$u(0, x) = \sin x \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = e^{-x}, \quad x \geq 0. \quad (3)$$

Dividimos o problema em duas partes: **(I)** Para $(t, x) \in R$ tal que $x - vt \geq 0$, empregamos a fórmula de D'Alembert usual,

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (f(x + vt) + f(x - vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(y) dy$$

com $f(x) = \sin x$ e $g(x) = e^{-x}$, que resulta em

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2} (\sin(x + vt) + \sin(x - vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} e^{-y} dy \\ &= \sin x \cos vt - \frac{1}{2v} (e^{-(x+vt)} - e^{-(x-vt)}) \\ &= \sin x \cos vt + \frac{1}{v} e^{-x} \sinh vt. \end{aligned} \quad (4)$$

Note que, devido a causalidade, o intervalo de dependência $[x - vt, x + vt]$ do ponto (t, x) está contido no semi-eixo $[0, \infty)$, sobre o qual a corda se estende quando em repouso, e a solução $u(t, x)$ para os pontos (t, x) tais que $x - vt \geq 0$ não difere da solução do PVI de uma corda infinita.

(II) Para $(t, x) \in R$ tal que $x - vt \leq 0$, devemos retornar à solução geral da equação (1):

$$u(t, x) = F(x + vt) + G(x - vt) \quad (5)$$

onde F e G , devido as condições iniciais (3),

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= \sin x, \\ v(F'(x) - G'(x)) &= e^{-x}, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

são dados por

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2v} e^{-x} + K/2 \\ G(x) &= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2v} e^{-x} - K/2, \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

com K uma constante de integração arbitrária.

Note que o argumento da função G em (5) é negativo restando ainda, neste caso, determinar a função $G(x)$ para $x < 0$. Para isso, impomos a (5) a condição de fronteira (2). Aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$F'(vt) + G'(-vt) = e^{-t} , \quad t \geq 0 .$$

A seguir, escrevemos esta equação na variável $y = vt$,

$$(F(y) - G(-y))' = e^{-y/v} , \quad y \geq 0$$

de forma que sua integral

$$F(y) - G(-y) = -ve^{-y/v} + K' , \quad y \geq 0$$

juntamente com (6), resulta

$$\begin{aligned} G(-y) &= ve^{-y/v} + F(y) - K' \\ &= ve^{-y/v} + \frac{1}{2} \sin y - \frac{1}{2v} e^{-y} + K/2 - K' , \quad y \geq 0 . \end{aligned} \quad (7)$$

K' é uma nova constante de integração. Substituindo (6) e (7) em (5), obtemos a solução

$$\begin{aligned} u(t, x) &= F(x + vt) + G(-(vt - x)) \\ &= ve^{-(t-x/v)} + \frac{1}{2} (\sin(x + vt) + \sin(vt - x)) - \frac{1}{2v} (e^{-(x+vt)} + e^{-(vt-x)}) + K - K' \\ &= ve^{-(t-x/v)} + \cos x \sin vt - \frac{1}{v} e^{-vt} \cosh x + \frac{1}{v} - v \end{aligned} \quad (8)$$

para $x - vt < 0$. Observe que as constantes de integração $K = 1/v$ e $K' = v$ foram escolhidas de tal maneira que a solução $u(t, x)$ seja contínua (sobre a característica $x - vt = 0$, pois é contínua em $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \setminus \{x - vt = 0\}$). Esta escolha evita que haja uma descontinuidade na solução se propagando com velocidade v partindo da origem: $x = 0$ em $t = 0$. Para isso, comparem as soluções obtidas para $x - vt > 0$ e $x - vt < 0$, equações (4) (primeira e segunda linhas) e (8) (segunda linha), no limite em que (t, x) se aproxima, por cima e por baixo, da reta $x - vt = 0$:

$$\lim_{x-vt \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} (\sin(x + vt) + \sin(x - vt)) - \frac{1}{2v} (e^{-(x+vt)} - e^{-(x-vt)}) \right\} = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2v} (e^{-2x} - 1)$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x-vt \rightarrow 0} \left\{ ve^{-(t-x/v)} + \frac{1}{2} (\sin(x + vt) + \sin(vt - x)) - \frac{1}{2v} (e^{-(x+vt)} + e^{-(vt-x)}) + K - K' \right\} \\ = v + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2v} (e^{-2x} + 1) + K - K' \end{aligned}$$

coincide com a expressão logo acima se $K = 1/v$ e $K' = v$.

Comentário sobre a solução (4) e (8): A segunda linha de (8) sugere que a solução $u(t, x)$ definida em $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ pode ser estendida para $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ por paridade par, se a condição de fronteira do tipo Neumann for homogênea: $u_x(t, 0) = 0$ (extremidade $x = 0$ da corda se movimentando

livremente). De fato, se substituirmos (2) pela equação homogênea e (3) pelas condições iniciais estendidas a $\mathbb{R}$ como funções pares:

$$u(0, x) = \tilde{f}(x) = \sin |x| \quad e \quad u_t(0, x) = \tilde{g}(x) = e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

então a fórmula usual de D'Alembert aplicada ao problema estendido

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2} \left(\tilde{f}(x+vt) + \tilde{f}(x-vt) \right) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \tilde{g}(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\tilde{f}(x+vt) + \tilde{f}(x-vt) \right) + \frac{1}{2v} \left(\int_0^{vt+x} \tilde{g}(y) dy + \int_0^{vt-x} \tilde{g}(y) dy \right) \end{aligned}$$

que é claramente par na variável x , fornece a solução para o problema

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (\sin |x+vt| + \sin |x-vt|) - \frac{1}{2v} \begin{cases} (e^{-|x+vt|} + e^{-|x-vt|} - 2) & \text{se } |x| \leq vt \\ |e^{-|x+vt|} - e^{-|x-vt|}| & \text{se } |x| > vt \end{cases}$$

que coincide, a menos do termo de fronteira não homogêneo e K' , com (4) e (8) para $x > 0$. Fisicamente, uma onda ao atingir a extremidade livre da corda é refletida com a paridade par.

Exercício 2 (Oscilações forçadas) Considere o problema:

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = A \sin 2\pi\omega t, \quad (9)$$

em $R = \{t > 0, 0 < x < L\}$, sujeita à condição de fronteira

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad t > 0 \quad (10)$$

onde A , v e ω são reais positivos.

Vamos mostrar que, exceto para certos valores especiais $\{\omega_n\}$ de ω , o problema dado pelas equações (9) e (10) admite uma solução da forma $\hat{u}(t, x) = p(x) \sin 2\pi\omega t$. Derivando a forma da solução duas vezes com respeito a t e x

$$\hat{u}_{tt} = -4\pi^2\omega^2 p \sin 2\pi\omega t$$

$$\hat{u}_{xx} = p'' \sin 2\pi\omega t,$$

substituindo em seguida as derivadas em (9), obtemos

$$-p'' - \frac{4\pi^2}{v^2} \omega^2 p = A, \quad 0 < x < L \quad (11)$$

Devido a condição de fronteira (10), procuramos uma solução de (11) na forma de uma série de Fourier em senos:

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (12)$$

Para isso, representamos o termo não-homogêneo de (11) em uma série de Fourier em senos (de mesmo período $2L$):

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad 0 < x < L \quad (13)$$

onde

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{2A}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \\ &= \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) . \end{aligned}$$

Substituindo (12) e (13) em (11), usando a independência linear das funções $\left\{ \sin \frac{n\pi}{L} x , n \in \mathbb{N} \right\}$, obtemos

$$\frac{4\pi^2}{v^2} (\omega_n^2 - \omega^2) c_n = h_n$$

de onde se conclui: se

$$\omega \neq \omega_n := \frac{nv}{2L} \quad (14)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, então existe uma solução $p(x)$ de (11) da forma (12) com

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{v^2}{4\pi^2} \frac{h_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \\ &= \frac{Av^2}{2n\pi^3} \frac{1 - \cos n\pi}{\omega_n^2 - \omega^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Determinamos agora a solução $u(t, x)$ do problema (9) e (10) tal que satisfaz

$$u(0, x) = 0 \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = 0 , \quad 0 \leq x \leq L . \quad (16)$$

A solução geral do problema (9) e (10) é

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_{\text{hom}}(t, x) + p(x) \cos 2\pi\omega t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos 2\pi\omega_n t + d_n \sin 2\pi\omega_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin 2\pi\omega t \sin \frac{n\pi}{L} x \end{aligned} \quad (17)$$

com b_n e d_n a serem determinados pelas equações

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x = 0 \\ u_t(0, x) &= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (\omega_n d_n + \omega c_n) \sin \frac{n\pi}{L} x = 0 . \end{aligned}$$

Pela ortogonalidade das funções $\sin \frac{n\pi}{L} x$, obtemos

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ d_n &= -\frac{\omega}{\omega_n} c_n , \quad \forall n \in \mathbb{N} . \end{aligned} \quad (18)$$

A solução do problema PIVF, equações (9) e (10) e (16), no caso não-ressonante (14) é dada por (17), (15) e (18):

$$u(t, x) = \frac{Av^2\omega}{2\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \left(\frac{\sin 2\pi\omega t}{\omega} - \frac{\sin 2\pi\omega_n t}{\omega_n} \right) \sin \frac{n\pi}{L} x . \quad (19)$$

Quando $\omega = \omega_n$ para algum n , aplicamos L'Hopital à solução $u(t, x)$ com $\omega \neq \omega_n$, no limite $\omega \rightarrow \omega_n$. Suponha $\omega = \omega_{n_0}$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Então, aplicando L'Hopital ao termo $n = n_0$ da solução (19)

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \omega_{n_0}} \frac{1}{\omega_{n_0}^2 - \omega^2} \left(\sin 2\pi\omega t - \frac{\omega}{\omega_{n_0}} \sin 2\pi\omega_{n_0} t \right) &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_{n_0}} \frac{1}{(\omega_{n_0}^2 - \omega^2)'} \left(\sin 2\pi\omega t - \frac{\omega}{\omega_{n_0}} \sin 2\pi\omega_{n_0} t \right)' \\ &= \frac{\pi t \cos 2\pi\omega_{n_0} t}{-\omega_{n_0}} + \frac{\sin 2\pi\omega_{n_0} t}{2\omega_{n_0}^2}, \end{aligned}$$

onde $'$ denota a derivada com respeito a ω , obtemos uma solução

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{Av^2\omega_{n_0}}{2\pi^3} \sum_{n \geq 1, n \neq n_0} \frac{1 - \cos n\pi}{n} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega_{n_0}^2} \left(\frac{\sin 2\pi\omega_{n_0} t}{\omega_{n_0}} - \frac{\sin 2\pi\omega_n t}{\omega_n} \right) \sin \frac{n\pi}{L} x \\ &+ \frac{Av^2}{4\pi^3\omega_{n_0}} \frac{1 - \cos n_0\pi}{n_0} \left(\frac{\sin 2\pi\omega_{n_0} t}{\omega_{n_0}} - 2\pi t \cos 2\pi\omega_{n_0} t \right) \sin \frac{n_0\pi}{L} x \end{aligned}$$

cujos modos de vibração normal correspondente à frequência $\omega_{n_0} = \frac{n_0 v}{2L}$ é amplificado por t , devido a ressonância. Note que $1 - \cos n_0\pi$ se anula quando n_0 é par e somente os modos ímpares podem ser ressonantes.