

Sexta Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Fórmula de D'Alembert e Oscilações Forçadas)

IFUSP - Maio 2019

Exercício 1 (Corda semi-infinita) Considere o PIVF:

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > 0, x > 0$$

sujeita às condições de fronteira

$$u_x(t, 0) = e^{-t}, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

e iniciais

$$u(0, x) = \sin x \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = e^{-x}, \quad x \geq 0$$

Determine a solução pela fórmula de D'Alembert (ou diretamente da solução geral desta equação) para $x - vt \geq 0$ e $x - vt < 0$. Em seguida, interprete a reflexão dos sinais na extremidade $x = 0$. Se a condição de fronteira (1) fosse homogênea, qual seria a paridade da solução estendida em $\mathbb{R}$? Veja págs. 160–163 do livro texto “Análise de Fourier e EDP's”, de Djairo G. de Figueiredo.

Exercício 2 (Oscilações forçadas) Considere o problema:

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = A \sin 2\pi\omega t,$$

em $R = \{t > 0, 0 < x < L\}$, sujeita à condição de fronteira

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad t > 0$$

onde A , v e ω são constantes. Mostre que, exceto para certos valores especiais $\{\omega_n\}$ de ω , o problema acima tem solução da forma $p(x) \sin 2\pi\omega t$ onde

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

é uma série de Fourier em senos, devido a condição de fronteira. Calcule a série $p(x)$ e os valores especiais ω_n 's. Encontre a solução $u(t, x)$ do problema acima que satisfaz às condições iniciais

$$u(0, x) = 0 \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L$$

quando $\omega \neq \omega_n$ para todo n e quando $\omega = \omega_n$ para algum n .

Indicação: Aplique L'Hopital à solução $u(t, x)$ com $\omega \neq \omega_n$ no limite $\omega \rightarrow \omega_n$. Veja Exemplo 2, pág. 148 do livro texto de Djairo G. de Figueiredo.