Sétima Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Transformada de Fourier, Convolução e Identidade de Parseval)

IFUSP - 28 Maio 2019

Exercício 1 *Calcule a transformada de Fourier das seguintes funções:*

1.
$$f(x) = e^{-a|x|} , \qquad a > 0 \ .$$

2.
$$f(x) = e^{-a|x|} \sin cx , \qquad a > 0 \ , \ c \in \mathbb{R} \ .$$

Utilize para o cálculo de $\hat{f}(\xi)$ *a propriedade da transformada de Fourier da modulação de* $f(x)$ *por* $e^{\pm icx}$ *e o resultado do ítem 1.*

3.
$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{a} & \text{se} \quad |x| \leq a \\ 0 & \text{se} \quad |x| > a \end{cases} , \qquad a > 0 \ .$$

4.
$$f(x) = e^{-ax^2/2} \ , \qquad a > 0 \ .$$

Exercício 2 ***(i)*** *Calcule a função* $f(x)$ *cuja transformada de Fourier é*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin a\xi}{\xi} e^{-b|\xi|} \ , \qquad a, b > 0 \ ,$$

e mostre que

$$\int_0^\infty \frac{\sin a\xi}{\xi} e^{-b\xi} d\xi = \arctan \frac{a}{b} \ .$$

(ii) *Verifique, em seguida, o teorema de Plancherel–Parseval:* $\|f\|^2 = \left\|\hat{f}\right\|^2$ *para a função Gaussiana:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \, e^{-x^2/(2a)} \ .$$

Indicação: Para primeira parte, utilize os teoremas da convolução e a fórmula da inversa (Teoremas 6.3' e 6.1 do livro texto "Análise de Fourier e EDP", Djairo G. de Figueiredo):

$$f = \left(\hat{f}\right)^\vee = \left(\hat{\chi}\hat{\phi}\right)^\vee = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi * \phi$$

onde $\hat{\chi}(\xi) = (1/\xi) \sin a\xi$ e $\hat{\phi}(\xi) = e^{-b|\xi|}$.