Sétima Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Transformada de Fourier, Convolução e Identidade de Plancherel)

IFUSP - Junho 2019

Exercício 1 *Calcularemos a transformada de Fourier*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-i\xi x}\ dx$$

de $f(x)$ das seguintes funções:

1. *Se $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$, então*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|-i\xi x}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\xi)x}\ dx + \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\xi)x}\ dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\xi)x}\ dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(a-i\xi)x}\ dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi} \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2}\ .
\end{aligned}$$

2. *Se $f(x) = e^{-a|x|} \sin cx$, $a > 0$ e $c \in \mathbb{R}$, escrevemos*

$$f(x) = e^{-a|x|}\ \frac{e^{icx} - e^{-icx}}{2i}\ .$$

Fazendo uso das propriedades

$$\begin{aligned}
a\widehat{f_1 + b}f_2(\xi) &= a\hat{f}_1(\xi) + b\hat{f}_2(\xi) \\
\widehat{fe^{\pm icx}}(\xi) &= \hat{f}(\xi \mp c)
\end{aligned}$$

juntamente com a transformadas de Fourier do ítem 1., temos

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2i}\left(\widehat{e^{-a|x|+icx}}(\xi) - \widehat{e^{-a|x|-icx}}(\xi)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\widehat{e^{-a|x|}}(\xi - c) - \widehat{e^{-a|x|}}(\xi + c)\right) \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{a}{(\xi - c)^2 + a^2} - \frac{a}{(\xi + c)^2 + a^2}\right) \\
&= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2ac\xi}{(\xi^2 + a^2 + c^2 - 2c\xi)(\xi^2 + a^2 + c^2 + 2c\xi)} \\
&= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2ac\xi}{(\xi^2 + a^2 + c^2)^2 - 4c^2\xi^2}\ .
\end{aligned}$$

Note que a função $f(x)$ é ímpar e sua transformada de Fourier $\hat{f}(\xi)$ é ímpar e imaginária pura.

3. *Seja $f(x) = 1 - |x|/a$ se $|x| \leq a$ e $f(x) = 0$ se $|x| > a$. Então*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right)e^{-i\xi x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-a}^{0}\left(1 + \frac{x}{a}\right)e^{-i\xi x}dx + \int_{0}^{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right)e^{-i\xi x}dx\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{0}^{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right)e^{i\xi x}dx + \int_{0}^{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right)e^{-i\xi x}dx\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(I_a(\xi) + I_a(-\xi))\ .
\end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}
I_a(\xi) &= \int_{0}^{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right)e^{i\xi x}dx \\
&= \frac{1}{i\xi}\left((1 - \frac{x}{a})e^{i\xi x}\Big|_{0}^{a} + \frac{1}{a}\int_{0}^{a}e^{i\xi x}dx\right) \\
&= \frac{-1}{i\xi} + \frac{1}{a\xi^2}(1 - e^{i\xi a})
\end{aligned}$$

de onde se conclui

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a\xi^2}(1-e^{i\xi a})+\frac{1}{a\xi^2}(1-e^{-i\xi a})\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-\cos a\xi}{a\xi^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-\cos^2 a\xi/2+\sin^2 a\xi/2}{a\xi^2} \\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin^2 a\xi/2}{(a\xi/2)^2}\ .
\end{aligned}$$

4. *Se $f(x)=e^{-ax^2/2}$, então $f\in\mathscr{S}$* [1] *e a transformada de Fourier de f:*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2}\ e^{-i\xi x}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2}\ (\cos\xi x - i\sin\xi x)\ dx \qquad (1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{a\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\sqrt{2/a}\,\xi y\right)e^{-y^2}\ dy \equiv \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\sqrt{2/a}\,\xi\right) \qquad (2)
\end{aligned}$$

é definida em termos de uma função $\psi=\psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos(ty)\,e^{-y^2}\ dy/\sqrt{\pi}$ que satisfaz a equação

$$\psi'+\frac{t}{2}\psi=0$$

com $\psi(0)=1$ e cuja solução: $\psi(t)=\exp(-t^2/4)$ resulta em

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\sqrt{2/a}\,\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\xi^2/(2a)}\ . \qquad (3)$$

Observe que em todos os ítens acima $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é uma função integrável e integrável em valor absoluto, no sentido de uma integral de Riemann imprópria: $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\ dx=\lim_{N,M\to\infty}\int_{-M}^{N}|f(x)|\ dx<\infty$, estando desta forma definida sua transformada de Fourier $\hat{f}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$. Sendo f uma função real sua transformada de Fourier $\hat{f}$ é real se f for par e imaginária se f for ímpar. Observe também que $\hat{f}(\xi)$ tem a mesma paridade de $f(x)$.

Exercício 2 ***(i)*** *Desejamos encontrar uma função $f(x)$ cuja transformada de Fourier é*

$$\hat{f}(\xi)=\frac{\sin a\xi}{\xi}e^{-b|\xi|}\overset{\text{def.}}{=}\hat{\chi}(\xi)\hat{g}(\xi)\ ,\qquad a,b>0 \qquad (4)$$

e demostrar que

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin a\xi}{\xi}e^{-b\xi}d\xi=\arctan\frac{a}{b}\ . \qquad (5)$$

[1] Em particular, f é contínua, limitada, integrável e absolutamente integrável.

Para isso, observamos o seguinte fato: se

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi * g(x) \ , \tag{6}$$

então

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\chi * g}(\xi) = \hat{\chi}(\xi)\hat{g}(\xi) \ . \tag{7}$$

pelo teorema da convolução (veja Teorema 6.3' e exercício na pág. 210 do livro texto "Análise de Fourier e equações diferenciais parciais", Djairo G. de Figueiredo). As condições para o uso deste teorema são χ e g integráveis e absolutamente integráveis e χ ou g contínua e limitada. Estas condições são satisfeitas como veremos a seguir.

Vamos calcular as funções $\chi(x)$ e $g(x)$. Observe que, se $\chi(x) = \sqrt{\pi/2}$ para $|x| \le a$ e $\chi(x) = 0$ para $|x| > a$, então

$$\begin{aligned}
\hat{\chi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x) \ e^{-i\xi x} \ dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} e^{-i\xi x} \ dx \\
&= \frac{1}{\xi} \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi a}}{-2i} \\
&= \frac{\sin a\xi}{\xi}
\end{aligned}$$

coincide com a função definida em (4). Note que χ é integrável e absolutamente integrável.

Como a anti-transformada de Fourier de uma função $\phi(\xi)$ par qualquer é, pela mudança de variável $\xi \longrightarrow -\xi$, formalmente a transformada de Fourier de ϕ:

$$\phi^{\vee}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} \phi(-\xi) e^{-i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = \hat{\phi}(x) \ ,$$

se $\hat{g}(\xi) = e^{-b|\xi|}$, $b > 0$, então pelo ítem 1. do exercício anterior e fórmula da inversa

$$\begin{aligned}
g(x) &= (\hat{g})^{\vee}(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) \ e^{-i\xi x} \ d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b|\xi|} \ e^{-i\xi x} \ d\xi \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{b}{x^2 + b^2} \ .
\end{aligned}$$

Note que $g(x)$ é contínua, limitada, integrável e absolutamente integrável. A fórmula da inversa (primeira igualdade) pode ser aplicada neste caso devido ao Corolário 4.18 dos "Complementos ao curso de Física-Matemática I" que garante a igualdade da função original e a função tranformada seguida da anti-transformada de Fourier da mesma.

Substituindo as funções χ e g obtidas no lado direito de (6), concluimos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x-y) g(y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x-y) \ \frac{b}{y^2+b^2} dy \end{aligned}$$

e devido a

$$|x-y| \le a \Leftrightarrow -a \le y-x \le a \Leftrightarrow x-a \le y \le x+a \ ,$$

continuamos

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-a}^{x+a} \frac{b}{y^2+b^2} dy \ .$$

Fazendo a mudança de variável

$$\begin{aligned} y &= b \tan\theta \\ dy &= b \sec^2\theta d\theta \\ b^2+y^2 &= b^2\left(1+\tan^2\theta\right) = b^2\sec^2\theta \end{aligned}$$

esta integral pode finalmente ser escrita como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\arctan(x-a)/b}^{\arctan(x+a)/b} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\arctan\frac{x+a}{b} - \arctan\frac{x-a}{b} \right) \end{aligned}$$

de onde se conclui, juntamente com a paridade ímpar da função arco-tangente, fórmula da inversa e definição (4) de $\hat{f}(\xi)$

$$\begin{aligned} 2\arctan\frac{a}{b} &= \arctan\frac{a}{b} - \arctan\frac{-a}{b} \\ &= \sqrt{2\pi} f(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= 2\int_0^{\infty} \frac{\sin a\xi}{\xi} e^{-b\xi} d\xi \end{aligned}$$

concluindo a demonstração de (5).

(ii) *Verifiquemos a identidade de Plancherel–Parseval: $\|f\|^2 = \left\|\hat{f}\right\|^2$ para a função Gaussiana:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \ e^{-x^2/(2a)}$$

cuja transformada de Fourier é

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a\xi^2/2} \ .$$

Substituindo a por $1/a$ em f e $\hat{f}$ no ítem 4. do Exercício 1, multiplicando ambas por $1/\sqrt{2\pi a}$, obtemos as f e $\hat{f}$ deste exercício.

Por um lado, temos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx &= \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a}\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\ dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\ .
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2}\ d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}\ d\eta = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\ ,
\end{aligned}$$

concluindo a igualdade.