Oitava Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Transformada de Fourier, Convolução e Inversa: Aplicações em EDP)

IFUSP - 11 Junho 2019

Exercício 1 *Considere o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF)*

$$\frac{1}{\kappa}u_t - u_{xx} = 0 \ , \qquad t > 0 \ , \ x > 0$$

$$u(t,0) = A \ , \qquad t > 0$$

e

$$u(0,x) = f(x) \ , \qquad x \geq 0 \ ,$$

onde A é uma constante. Mostre que a solução deste problema é dada por

$$u(t,x) = \varphi * \tilde{f}(x) + A\left[1 - \operatorname{erf}\left(x/\sqrt{4\kappa t}\right)\right]$$

onde $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-s^2}ds$ *é a função erro,* $\tilde{f}(x)$ *é a extensão ímpar de f em $\mathbb{R}$:* $\tilde{f}(x) = -f(-x)$ *se $x < 0$ e* $\varphi(x) = (1/\sqrt{4\pi\kappa t})\exp(-x^2/4\kappa t)$ *é o núcleo integral do calor, isto é,* $\sqrt{2\pi}\varphi(x) = \phi(x) = (1/\sqrt{2\pi})\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\phi}(\xi)e^{i\xi x}d\xi$ *é a anti-transformada de Fourier de* $\hat{\phi}(\xi) = e^{-\kappa\xi^2 t}$.

Indicação. Veja págs. 220 e 221 do livro texto “Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais” de Djairo G. de Figueiredo.

Exercício 2 (Vibrações forçadas) *Use a transformada de Fourier para obter a fórmula de D' Alembert (veja última fórmula da Sec. 5.7 na pág.160 de “Análise de Fourier e EDP”, Djairo G. de Figueiredo)*

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x+vt) + f(x-vt)\right) + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} g(y)dy + \frac{v}{2}\int_0^t \left(\int_{x-v(t-\tau)}^{x+v(t-\tau)} h(\tau,y)\ dy\right)d\tau$$

do problema de valor inicial (PVI) para as vibrações forçadas de uma corda elástica infinita:

$$\frac{1}{v^2}u_{tt} - u_{xx} = h(t,x) \ , \qquad t > 0 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

com

$$u(0,x) = f(x) \qquad e \qquad u_t(0,x) = g(x) \ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

Indicação: Note que $x(t) = b\cos at + d\,\dfrac{\sin at}{a} + \displaystyle\int_0^t \frac{\sin a(t-s)}{a}c(s)ds$ satisfaz a equação $x'' + a^2x = c(t)$ com $x(0) = b$ e $x'(0) = d$.