Introdução à Mecânica Estatística
Segunda Prova-06/12/2018

1) Considere um sistema de férmions num espaço tridimensional, com espectro de energia

$$\epsilon_{\vec{k}} = c|\vec{k}|^a,$$

onde $|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ e $c > 0$.

~~a)~~ Calcule a energia de Fermi em função do volume V e do número de partículas N, (1,0) +1,0

b) Calcule o prefator A da relação $pV = AU$; (1,5)

c) Calcule a pressão do sistema a $T = 0$ como função de N e V. Interprete fisicamente este resultado, (1,0)

(d) item extra:) Calcule uma forma assintótica, quando $T << T_F$, para a energia interna e o calor específico a volume constante como funções de T e N. (2,0)

2) De uma maneira análoga à fótons e fônons, mágnons correspondem à excitações elementares associadas ao operador $\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}}$, podendo dessa forma ser representada por uma coleção de osciladores harmônicos independentes com energia $E = \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} n_{\vec{k}}$, onde $n_{\vec{k}} = 0, 1, \ldots..$ No caso de mágnons bidimensionais, a relação de dispersão é dada por $\epsilon_{\vec{k}} = Ak^2 = A(k_x^2 + k_y^2)$.

~~a)~~ Obtenha $\ln Z$ para este sistema em termos de $\epsilon_{\vec{k}}$. Explique claramente e detalhadamente seus cálculos.(1,0) +1,0

b) Usando a relação de dispersão acima, ache a capacidade térmica no regime de baixas temperaturas. Mostre detalhadamente todos os cálculos efetuados. (2,0)

+3,5

~~3)~~ ~~a)~~ Defina condensação de Bose-Einstein e explique, utilizando a distribuição de Bose-Einstein, os mecanismos para sua ocorrência e o ponto onde ocorre. (0,5)

Conforme vimos em sala de aula, no caso de bósons livres com espectro de energia dado por $\epsilon_{\vec{k}} = \hbar^2 k^2/2m$, a expressão $\frac{1}{V}\ln\Xi(T,V,z)$ pode ser reescrita de uma forma mais compacta, dada por $\frac{1}{V}\ln\Xi(T,V,z) = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z)$, onde $g_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$ e $\lambda = \frac{h}{(2\pi m k_B T)^{1/2}}$.

~~b)~~ Mostre que na fase normal, o número total de partículas e energia média são dados por $N = \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z)$ e $U = \frac{3V}{2\beta\lambda^3} g_{5/2}(z)$. (1,0)

~~c)~~ Mostre que a temperatura de condensação de Bose-Einstein pode ser escrita da seguinte forma $T_0 = A(N/V)^{2/3}$. Identifique o prefator A. (1,0)

~~d)~~ Mostre que na região de condensação o calor específico a volume constante $c_V = \frac{1}{N}(\frac{\partial U}{\partial T})_V$ é proporcional a $T^{3/2}$. (1,0)

Formulário

- $Z = \sum_{estados} e^{-\beta\mathcal{H}}, \quad F = -\frac{1}{\beta}\ln Z$
- $U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z$
- $\Xi(T,V,z) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z(T,V,N)$, onde $Z(T,V,N)$ é a função de partição canônica.
- $N = z\frac{\partial}{\partial z}\ln\Xi(T,V,z), \quad U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi(T,V,z)$
- $\ln\Xi(T,V,\mu) = \pm\sum_i \ln\{1 \pm \exp[-\beta(\epsilon_i - \mu)]\}$ $N = \sum_i \frac{1}{\exp\beta((\epsilon_i-\mu))\pm 1}$, $\Phi = -k_B T\ln\Xi(T,V,z)$

$$I(T) = I(0) + \frac{\pi^2}{6} g'(\mu)(k_B T)^2 \quad \text{onde} \quad I_0 = \int_0^\mu g(\epsilon)d\epsilon$$

$$p = -\frac{\Phi}{V}, \qquad p = -(\frac{\partial\Phi}{\partial V})_{T,\mu}$$

$$U = \sum_i \frac{\epsilon_i}{\exp\beta(\epsilon_i - \mu) \pm 1}$$