4^a Provinha de Mecânica-Estatística

1) (2,0) Considere um sistema formado por duas partículas idênticas que podem ocupar os níveis de energia ϵ_0 (estado fundamental), ϵ_1 (1o estado excitado) e ϵ_2 (2o estado excitado). De que formas estes níveis de energia podem ser preenchidos no caso das partículas serem bósons? E férmions?

2) Considere um sistema de férmions (sem spin) num espaço tridimensional, com espectro de energia

$$\epsilon_{\vec{k}} = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}, \tag{1}$$

10

onde $c > 0$.

a) Definindo a energia de Fermi por $\epsilon_F = c|\vec{k_F}|$, faça um gráfico da distribuição de Fermi-Dirac em função da energia no caso completamente degenerado ($T = 0$). Interprete-o fisicamente. (2,0)

b) Utilizando a estatística de Fermi-Dirac, escreva as expressões para N e U em termos de $\vec{k}$. Indique claramente as considerações feitas. (3,0)

c) Ainda para o caso completamente degenerado, calcule a energia de Fermi em função do volume V e do número de partículas N. (3,0)

(extra) d) Calcule o prefator A da relação $pV = AU$.(2,0)

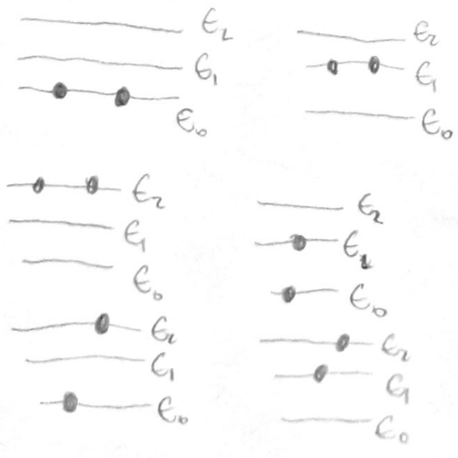
$\boxed{2}$

d) $pV = k_B T \ln \Xi$; p/ $T=0$, $\ln \Xi = \sum_i \ln(1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}) \approx$

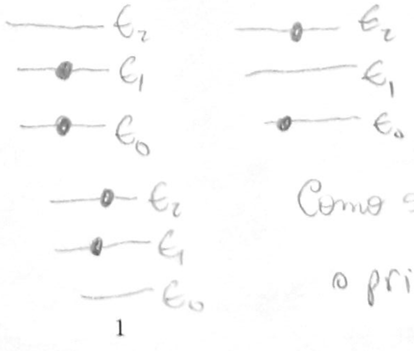
$pV = A \dfrac{V}{8\pi^2} \dfrac{\epsilon_F^4}{c^3}$

$\langle n_\epsilon \rangle = \frac{1}{\exp\beta(\epsilon-\mu)\pm 1}$, $U = \sum_i \frac{\epsilon_i}{\exp\beta(\epsilon_i-\mu)\pm 1}$, $N = \sum_i \frac{1}{\exp\beta(\epsilon_i-\mu)\pm 1}$ $pV = k_B T \ln \Xi$, onde $\Xi = \sum_i \ln(1 \pm \exp\beta(\epsilon_i - \mu))$, Para $\vec{k}$ discreto quanto $L \to \infty$: $\sum_{\vec{k}} \to (\frac{L}{2\pi})^3 \int_V dk_x dk_y dk_z$, Coordenadas esféricas $\int_V dk_x dk_y dk_z = 4\pi \int k^2 dk$

1) Se forem bósons:
As possibilidades são



Se forem férmions,
As possibilidades são:

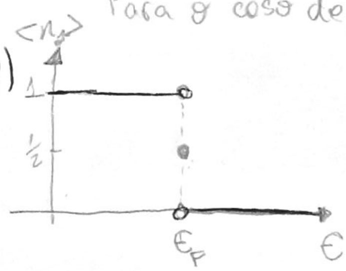


Como são férmions, devem seguir o princípio da exclusão de Pauli.

Para o caso degenerado:

2)

a)



Neste caso todas partículas ocupam o estado Fundamental (para $T=0$).

Pois a distribuição p/ férmions é dada por:

p/ $T=0$ ($\beta \to \infty$):

$$\langle n_j \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} = \begin{cases} =1, & p/\ \epsilon<\epsilon_F \\ =0, & p/\ \epsilon>\epsilon_F \end{cases}$$

b) Temos $\epsilon = c\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2} = ck$, com $k=\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2} = |\vec{k}|$

$$N = \sum_j \langle n_j \rangle = \sum_j \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j-\mu)}+1}$$

No limite termodinâmico ($L\to\infty$):

$$N \to \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} d^3k$$

$\epsilon = c\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$

Passando p/ coordenadas esféricas:

$$N = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 4\pi \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{e^{\beta(ck-\mu)}+1}$$, Agora fazendo uma mudança de variável p/ ϵ:

$$\epsilon = ck \Rightarrow dk = \frac{d\epsilon}{c} \text{ e } k^2 = \frac{\epsilon^2}{c^2} \Rightarrow N = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 4\pi \int_0^\infty \frac{\epsilon^2}{c^2}\frac{d\epsilon}{c}\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}$$

Para $T=0 \Rightarrow N = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 4\pi \left[\int_0^{\epsilon_F} \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{c^3} + \int_{\epsilon_F}^\infty 0\right]$ (pelo item (a))

$$\Rightarrow N = \frac{V}{2\pi^2 c^3}\frac{\epsilon_F^3}{3}, \text{ onde } \epsilon_F = ck_F \Rightarrow \boxed{N = \frac{V}{6\pi^2}k_F^3}$$

$U = \sum_j \epsilon \langle n_j \rangle$; Análogo ao que foi feito para N, obtém-se: $U = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 4\pi \int_0^{\epsilon_F} \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{c^3}$

$$\Rightarrow U = \frac{V}{2\pi^2 c^3}\frac{\epsilon_F^4}{4} = \boxed{\frac{V}{8\pi^2}ck_F^4 = U}$$

c) Do item (b): $N = \frac{V}{6\pi^2}k_F^3 = \frac{V}{6\pi^2}\frac{\epsilon_F^3}{c^3} \Rightarrow \epsilon_F^3 = 6\pi^2 c^3 \frac{N}{V} \Rightarrow \boxed{\epsilon_F = c\left(6\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3}}$