5^a Avaliação de Mecânica-Estatística

1) Conforme vimos em sala de aula, é possível mostrar que a radiação eletromagnética pode ser representada por uma coleção de osciladores harmônicos independentes, cada um com frequência própria de oscilação. Da quantização, obtermos o espectro de energia $\epsilon_{\vec{k}} = \hbar\omega_{\vec{k}} n_{\vec{k}}$.

a) Dê o significado físico dos termos $n_{\vec{k}}$ e $\omega_{\vec{k}}$ da expressão acima. (1,0)

b) É possível mostrar que para este sistema $\ln Z = -2\sum_{\vec{k}} \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}})$. Utilizando a relação de dispersão, $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$, mostre que a energia interna U é dada por $U = 2\sum_{\vec{k}} \frac{\hbar c|\vec{k}|}{e^{\beta\hbar c|\vec{k}|}-1}$ (3,0).

c) Tratando a expressão acima no limite termodinâmico, mostre que que a densidade espectral de energia como função da frequência ν é dada por $u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu}-1}$, onde $|\vec{k}| = 2\pi\nu/c$. (3,0)

d) Obtenha U/V como função da temperatura. (3,0)

Explique detalhadamente seus cálculos, incluindo as considerações e aproximações feitas. *Não é necessário calcular a integral, mas deixe claramente definido seus limites de integração.*

a) n_k é o número de osciladores para cada modo de vibração X

ω_K é a frequência de vibração de cada modo ✓ 0,5

b) Como $\ln Z = -2\sum_{\vec{k}} \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega_K})$, e $U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z$

$$\Rightarrow U = 2\sum_{\vec{k}} \frac{\hbar\omega_K e^{-\beta\hbar\omega_K}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_K}} = 2\sum_{\vec{k}} \frac{\hbar\omega_K}{e^{\beta\hbar\omega_K} - 1}$$ ✓ 3

Transformando em termos de $|\vec{k}|$:

$$U = 2\sum_{\vec{k}} \frac{\hbar c|\vec{k}|}{e^{\beta\hbar c|\vec{k}|} - 1}$$

c) No limite Termodinâmico;

$(|\vec{k}| = K)$

$$U \to \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar c K\, d^3\vec{K}}{e^{\beta\hbar c K} - 1}$$, passando p/ coordenadas esféricas:

$$U = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 2.4\pi\int_0^{\infty} \frac{\hbar c K^3 dK}{e^{\beta\hbar c K} - 1} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 2.4\pi\int_0^{\infty} \frac{hc}{2\pi}\left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^3 \frac{2\pi\, d\nu}{c(e^{\beta h\nu} - 1)}$$

$$\Rightarrow U = \frac{L^3}{(2\pi)^3} 8\pi \frac{hc}{2\pi} \frac{(2\pi)^3}{c^3} \frac{2\pi}{c} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 \, d\nu}{e^{\beta h \nu} - 1} = V \underbrace{\frac{8\pi}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{h\nu^3 \, d\nu}{e^{\beta h \nu} - 1}}_{= u(\nu)}$$

Portanto, a densidade espectral de energia pode ser escrita como:

$$U = V \int_0^{\infty} u(\nu) \, d\nu \, , \quad \text{com } u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\beta h \nu} - 1}$$ ✓3

d) $$U = V \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 \, d\nu}{e^{\beta h \nu} - 1} \Rightarrow \frac{U}{V} = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 \, d\nu}{e^{\beta h \nu} - 1}$$ X