Mec_2Sem2015 - Prova1

Nome:____NUSP:____________

Você tem até 120 minutos para fazer esta prova. Resolva os exercícios de maneira organizada. Cada exercício vale 10/3 da prova. O Item 2(e) é um item extra e pode acrescentar até 0.5 pontos à nota da prova. Bom trabalho.

Dica geral I: caso você não consiga deduzir um resultado anterior necessário a um item, escreva explicitamente no item em consideração o que está faltando e siga em frente.

Dica geral II: muito cuidado com comentários qualitativos. Seja objetiv@ e rigoros@ com os conceitos.

1 Ressonância em uma cadeia de moléculas diatômicas lineares

Uma boa aproximação para a energia potencial entre átomos de uma cadeia de moléculas lineares diatômicas é dada por expressões do tipo Lennard-Jones, como por exemplo:

$$U(x) = -\frac{a}{x^4} + \frac{b}{x^8}$$

onde x é a distância entre os átomos da cadeia e a e b são parâmetros positivos. Em um experimento de ressonância envolvendo uma cadeia de moléculas diatômicas, constituídas por átomos de massas M e m, o sistema foi resfriado de maneira que sua energia total fosse bastante próxima do mínimo da energia potencial. A cadeia foi então excitada por um laser de baixa potência que introduz na dinâmica de oscilações naturais desta cadeia uma força do tipo $F_0 \cos \omega t$.

(a) Faça um esboço de $U(x)$. Para que valores de energia estados ligados são possíveis? Anote no seu esboço resultados de outros itens deste problema.

(b) Encontre, em termos dos parâmetros a e b, a distância de equilíbrio entre os átomos da cadeia linear e a frequência ω_0 de pequenas oscilações em torno desta posição de equilíbrio. Considere $M \gg m$, de maneira que o átomo de massa M permanece em repouso enquanto o mais leve percorre o eixo x.

(c) A partir do experimento de ressonância, o seguinte gráfico da absorção de potência do laser como função da frequência foi elaborado:

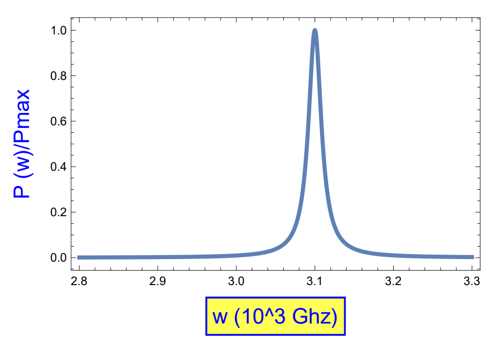

Figura 1: Gráfico para a ressonância de uma cadeia linear de moléculas.

Faça uma estimativa pelo gráfico para a frequência natural de oscilações ω_0. A distância de equilíbrio x_{eq} também pode ser obtida pode meio de *outros experimentos*. Indique como você pode obter os parâmetros a e b da energia $U(x)$ a partir dos resultados experimentais para x_{eq} e ω_0.

(d) Ainda dentro da aproximação $M \gg m$, *proponha* uma eq. diferencial que descreva a dinâmica do átomo de massa m para pequenos deslocamentos da posição de equilíbrio. Justifique, brevemente, a presença de cada termo na equação diferencial. Estime parâmetros que possam ser estimados.

Ressonância em uma cadeia de moléculas diatômicas lineares

2 Forças centrais

Duas partículas, massas m_1 e m_2 ($m_1 = 2m_2$), interagem por meio de uma força central cuja componente se escreve $f(r) = -Br^3$ ($\vec{F} = f(r)\hat{r}$).

(a) Dentre as quantidades energia, momento linear e momento angular, indique quais são conservadas para cada partícula do sistema. Para cada caso, escreva uma breve justificativa.

(b) Determine a energia potencial efetiva $V_{eff}(r)$ para o problema. Determine o valor de L_z para o movimento circular de raio a. Determine também o valor de $\dot{\theta}$ nesta mesma situação.

(c) Em um mesmo gráfico, faça 3 esboços da energia potencial efetiva como função de r considerando três valores L_1, L_2 e L_3 para L_z. Adote, necessariamente, $L_1 = 0$ e $L_3 > L_2 > 0$. Comente aspectos relevantes do gráfico (duas ou três afirmações são suficientes).

(d) Considere $L_z \neq 0$ e produza diagramas de fases para as coordenadas r ($\dot{r} \times r$) e θ ($\dot{\theta} \times \theta$) para os casos de movimento circular uniforme (raio a) e pequenas vibrações em torno de a (são 4 diagramas ao todo). Aproxime que para pequenas vibrações $\dot{\theta}$ é igual ao do movimento circular uniforme.

(e) (até 0.5 pontos extra na prova) Produza, separadamente, um esquema descrevendo a dinâmica do sistema de duas partículas para a seguinte situação: $E = E_{min}$ e $L_z = L_2$. Adote $\vec{V}_{cm} = 0$ e inclua um tracejado para a trajetória de cada partícula. Indique ainda o vetor posição relativa e as velocidades e as acelerações de cada partícula (vetores) em dois pontos distintos da trajetória.

Em caso dúvidas, o esquema abaixo oferece um exemplo contendo elementos que devem estar presentes.

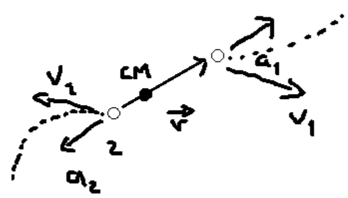

Figura 2: Exemplo para a dinâmica de um sistema de 2 partículas.

Forças centrais

3 Nave espacial

Uma astronauta está em uma nave espacial, no espaço livre, e aciona o propulsor da nave que passa a fazer um movimento estritamente em uma única direção (que chamamos $\hat{i}$). A astronauta pede então a um colega, que encontra-se em sua mesma "altura", que jogue uma caneta em sua direção. O mesmo lança a caneta com velocidade estritamente na horizontal $v_{0x}\hat{i}$ ($v_{0x} > 0$). Considere que o combustível é ejetado a uma taxa constante de módulo α e a uma velocidade também constante de módulo u_e. Considere ainda que no início da manobra o sistema tem massa m_0.

(a) A astronauta está em um referencial inercial? Se sim, explique porque. Se não, determine a aceleração do referencial da astronauta (use explicitamente a notação vetorial).

(b) Escreva a equação do movimento para descrever a *dinâmica da caneta*. Deixe claro qualquer força de inércia que possa ser necessária.

(c) Resolva as equações para encontrar $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ para a caneta. Considere a seguinte aproximação: $ln(1-\delta) \approx -\delta$ para $\delta \ll 1$. Justifique porque o seu "δ" é tal que "δ" $\ll 1$. A astronauta que observa o movimento percebe que a caneta "cai" alguns centímetros (na direção $-\hat{j}$, ver figura). A caneta poderia ter "caído" de acordo com seu modelo?

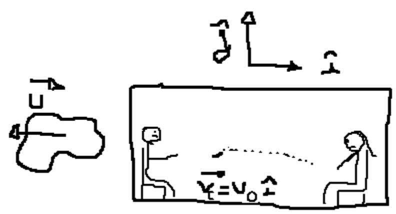

Figura 3: Esquema da situação descrita no problema. A linha tracejada exagera o desvio (em relação a horizontal) da trajetória da caneta que possui velocidade inicial $\vec{v} = v_{0x}\hat{i}$, com $v_{0x} > 0$.

(d) A observação que a caneta caiu alguns centímetros merece atenção. Explicações foram elaboradas:

(1) Emergência! Vamos olhar para a janela pois estamos próximos a um planeta que está, efetivamente, acelerando a caneta.

(2) A caneta foi polarizada por atrito e está sendo atraída por forças eletrostáticas por uma das paredes da nave (digamos o "chão").

(3) Emergência. Nossa nave está sendo atacada por uma espécie Alien, que a está puxando com um raio trator!

Refute ou dê suporte a cada uma das explicações. Alternativamente, elabore uma outra explicação que julgue melhor. Você ganha pontos caso consiga refutar e/ou dar suporte a qualquer uma destas explicações.

Nave espacial

Formulário

A priori, você vai utilizar, ou pensar sobre, estas fórmulas para resolver os exercícios da prova.

Derivada útil:

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^m}) = \frac{-m}{x^{m+1}}$$

Potência média absorvida em um ciclo do oscilador:

$$\bar{P}(\omega) = \frac{(F_0^2/m)\beta\omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2]}$$

Energia potencial devido a forças centrais:

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} f(r')dr'$$

Energia total para forças centrais:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

Energia potencial efetiva:

$$V_{eff}(r) = \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

Equação do foguete:

$$m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\frac{dm(t)}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

onde $m(t)$ é a massa da "nave".

Integral útil:

$$\int_0^t \frac{a}{b-at}dt = -[\ln(b-at)|_0^t]$$