Mec_2Sem2015 - Prova1_Sub_Solução&Critérios

Nome:____NUSP:___________

Você tem até 120 minutos para fazer esta prova. Resolva os exercícios de maneira organizada. Cada exercício vale 10/3 da prova. O Item 2(e) é um item extra e pode acrescentar até 0.5 pontos à nota da prova. Bom trabalho.

Dica geral I: caso você não consiga deduzir um resultado anterior necessário a um item, escreva explicitamente no item em consideração o que está faltando e siga em frente.

Dica geral II: muito cuidado com comentários qualitativos. Seja objetiv@ e rigoros@ com os conceitos.

1 Partícula carregada em um campo elétrico

Uma partícula carregada, carga q e massa m, é injetada com velocidade inicial $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\imath}$ para o interior de uma câmara dentro da qual está estabelecido um campo elétrico oscilante que se escreve $\vec{E} = E_0 \cos\alpha t\hat{\jmath}$ onde $E_0 > 0$.

(a) Escolha um sistema de coordenadas que julgar adequado e escreva as equações do movimento (segunda lei de Newton) para a partícula. Considere que a partícula tem carga q e desconsidere os efeitos da gravidade e da viscosidade. Escolha uma origem conveniente para o sistema de coordenadas e escreva as condições iniciais do problema (dado: a força devido um campo elétrico se escreve$\vec{F} = q\vec{E}$).

(2.5 pontos)

Temos que $\sum \vec{F} = q\vec{E} = qE_0 \cos\alpha t\hat{\jmath}$, desta maneira:

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= qE_0 \cos\alpha t \end{cases}$$

(1.5 pontos) As condições iniciais são $\dot{x}_0 = v_{0x}$ e $\dot{y}_0 = 0$; vou adotar que para $t = 0$ a particula está na origem (1.0 pontos, claro que a segunda é livre).

(b) Resolva as equações de movimento para encontrar $x(t)$ e $y(t)$. Escreva a solução geral do problema e implemente as condições iniciais do caso particular descrito (dica: solução da homogênea + solução particular).

(2.5 pontos)

A solução geral para $x(t)$ se escreve:

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t$$

(0.5 pontos) Para $y(t)$, temos:

$$y(t) = c_1 + c_2 t + y + y_p(t)$$

A solução particular é obtida com o “chute” $y_p(t) = A\cos\alpha t$, subtituindo na equação temos: $A = -qE_0/\alpha^2$. Desta maneira:

$$y(t) = c_1 + c_2 t + \frac{-qE_0}{\alpha^2 m}\cos\alpha t$$

(1.0 pontos) Implementando condições iniciais, temos:

$$\begin{cases} x(t) &= v_{0x}t \\ y(t) &= \frac{qE_0}{\alpha^2 m}(1 - \cos\alpha t) \end{cases}$$

(1.0 pontos)

(c) Faça um esboço da trajetória esperada para esta partícula enquanto a mesma está no interior da câmera.
(2.5 pontos)

Esperamos que a trajetória é uma oscilação no eixo y com uma translação no eixo x. A trajetória é similar ao gráfico da função $y(t) = (1 - \cos \alpha t)$.

(d) Em um experimento, a câmara foi preenchida com um gás cintilante que introduz uma pequena força viscosa, porém desprezível, na dinâmica da partícula e permite a observação direta de sua trajetória. Com base nesta observação, a seguinte imagem para a trajetória da partícula foi gravada:
(2.5 pontos)

Não há qualquer expectativa para a inclinação observada, o que deve estar relacionado com uma componente v_y para a velocidade inicial (0.5). O sinal da carga utilizada é positivo, pois a amplitude da oscilação é positiva (0.5 pontos). A frequência da oscilação, correspondade a α, e amplitude Amp é igual a:

$$\frac{qE_0}{\alpha^2 m} = Amp$$

Onde Amp e α podem ser extraídos do gráfico. Daí:

$$\frac{q}{m} = \frac{\alpha^2}{E_0}(Amp)$$

(1.0 pontos). Como a gravação durou 10 segundos, $v_{ox} = \Delta x/10$ (0.5 pontos).

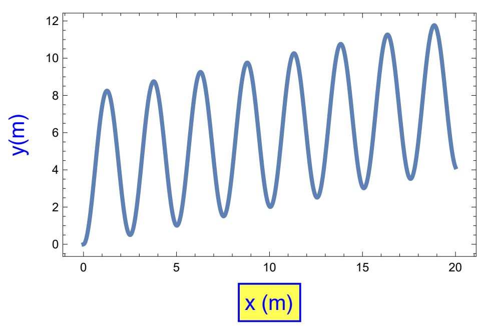

Figura 1: Gráfico da trajetória para a partícula de carga q, obtido experimentalmente.

Toda a gravação durou 10 segundos. Contraste a figura com sua expectativa do item (c). Que parâmetro precisa ser ajustado no experimento para que o resultado seja similar ao esperado? Qual o sinal da carga utilizada nesse experimento? Faça uma estimativa da razão q/m da partícula em função de E_0 e uma estimativa para a velocidade v_{0x}.

2 Átomos aprisionados

Dois cátions de átomos de Ca, de massa m e carga $q = +2e$, estão aprisionados em uma armadilha 1D eletroestática que exerce sobre o átomo i uma força externa que se escreve: $\vec{F}_i^{ext} = -m_i\omega_A^2(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$ onde $\vec{x}_i$ é o vetor posição (1D) da partícula i, m_i é a massa do cátion i e ω_A é uma constante (frequência da armadilha). Além desta força, as partículas interagem por meio da força de Coulomb:

$$\vec{F}_{q_1 q_2} = k\frac{q_1 q_2}{|\vec{x}|^2}\hat{x}$$

onde $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ é o vetor posição relativa e $k > 0$ é uma constante. Pelo efeito da armadilha, a força também está restrita a ser 1D.

(a) Para condições iniciais $\vec{x}_{10}$ e $\vec{x}_{20}$ (determinadas a partir do LAB), faça um esquema que mostre o vetor posição relativa e as forças externa e de Coulomb sobre cada partícula.
(2.5 pontos)
O esquema deve conter as forças de Coulomb (repulsiva) e da armadilha (atrativa), ao londo da linha de conecta as duas partículas, onde deve estar indicado o vetor $\vec{x}$.

(b) Dentre as quantidades energia e momento linear, indique quais são conservadas *para o sistema de duas partículas* (2 considerações ao todo). Para cada caso, escreva uma breve justificativa.
(2.5 pontos, 1.0 para a energia e 1.5 para o momento linear)
Energia: a energia é conservada pois tanto a força interna, quanto a força externa são conservativas (0.5 pontos). Para justificar que são conservativas, basta notar que são forças 1D que dependem apenas da posição (0.5 pontos). Perceba que o argumento $\nabla \times \vec{F}$ não está disponível, pois o sistema é 1D.
Momento linear: O momento linear total do sistema se escreve: $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, analisando a conservação de $\vec{P}$, temos:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

Notemos que:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{1(2)} + \vec{F}_1^{ext}$$

Quando somamos, as forças internas se anulam, e ficamos apenas com a força externa:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -m_1\omega_A^2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - m_2\omega_A^2(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$$

Como os átomos possuem mesma massa (se fossem isótopos de Ca, o momento não se conservaria!), temos:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

e, portanto, o momento se conserva, mesmo com a ação de uma força externa! Atenção: as forças externas não são pares ação-reação!!!!!!

(c) Determine a energia potencial $U(x)$ ($x = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| > 0$) do problema de dois corpos e faça um esboço de $U(x)$ como função de x. Indique posições de equilíbrio estável.
(2.5 pontos)

$$U(x) = U_{int}(x) + U_{ext}(x)$$

(0.5 pontos por reconhecer que soma dois termos). Os termos de $U(x)$ são calculados a partir da relação entre a força e a energia potencial:

$$U(x) = \frac{kq^2}{x} + \frac{1}{2}m_1\omega_A^2(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_A^2(x_2 - x_1)^2$$

note que há um termo de energia devido a interação de caga com a armadilha (-0.5 pontos referente a este erro)!

$$U(x) = \frac{kq^2}{x} + m\omega_A^2 x^2$$

(1.0 pontos). Um esboço revela que para x pequeno, temos uma barreira devido ao termo $\propto 1/x$ e para x grande uma barreira devido ao temos $\propto x^2$. Há um ponto de equilíbrio estável no meio do caminho (1.0 pontos).

(d) Determine a posição de equilíbrio x_{eq} do problema e ainda a frequência de oscilações ω_0^2 em torno da posição de equilíbrio.

(2.5 pontos, 1.0 para x_{eq} e 1.5 para ω_0)

Para o ponto de equilíbrio

$$U'(x) = -\frac{kq^2}{x^2} + 2m\omega_A^2 x$$

$$U'(x_{eq}) = 0 - \frac{kq^2}{x_{eq}^2} + 2m\omega_A^2 x_{eq}$$

$$x_{eq}^3 = \frac{kq^2}{2m\omega_A^2}$$

(1.0 pontos, -0.25 para erros algébricos). Para frequência de oscilações:

Temos que:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m}U''(x_0)$$

(0.5 pontos). Calculando a derivada, temos:

$$U''(x) = \frac{2kq^2}{x^3} + 2m\omega_A^2$$

em $x = x_{eq}$, temos:

$$U''(x_{eq}) = 4m\omega_A^2 + 2m\omega_A^2 = 6m\omega_A^2$$

de maneira que:

$$\omega_0^2 = 6\omega_A^2$$

(1.0 pontos, -0.25 para erros algébricos. Note ainda que o sinal tem que ser positivo!)

(e) (até 0.5 pontos extra na prova) discuta o efeito de uma força de prova do tipo $F_0 \cos\omega t$ sobre este sistema e como determinar a frequência ω_0^2 pela ação desta força (apoie seus argumentos com gráficos, esquemas, etc).

3 Nave espacial

Uma enorme nave espacial, em forma aproximada de um cilindro reto de raio R_0 e comprimento L, viaja em velocidade constante pelo espaço profundo, suficientemente afastada de outros corpos. Um mecanismo interno mantém a nave girando ao redor de seu eixo geométrico central com velocidade angular $\vec{\omega}$ constante ($\vec{\omega} = \omega_0 \hat{k}$). Dois cientistas, A e B, estão no interior da nave, em pé sob a casca cilíndrica, ambos em repouso em relação ao chão. Os cientistas estão distantes l metros um do outro (l é constante).

(a) O referencial do cientista A é inercial ? Se sim, explique porque. Caso contrário, determine a aceleração do referencial do cientista A. Use explicitamente a notação vetorial.
(3.0 pontos)
Não, o referencial de A é não inercial (1.0 pontos), A está em *movimento circular uniforme, de raio* R_0, devido a rotação do cilindro (0.5 pontos). Sua aceleração é dada por $\vec{a} = -R_0\omega_0^2\hat{r}$ (1.5 pontos). Este resultado é devido ao movimento circular uniforme, nenhuma relação com $\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$!!!

(b) Qual a resultante das forças atuando no cientista B medida pelo cientista A ? Faça um diagrama das forças que atuam em B de acordo com A e diga explicitamente quais destas forças são reais e quais são forças de inércia (massa de $B = m_B$).
(4.0 pontos)
Como B está em repouso para A, a resultante sobre B, de acordo com A, deve ser nula, resultante = 0 (2.0 pontos). Um diagrama mostra a força Normal (que é uma força real) (1.0 pontos) na direção do centro do cilindro e uma força centrífuga (que é uma força de inércia) para fora (1.0 pontos).

(c) O cientista B lança um objeto de massa m_0 para A. Determine a segunda lei de Newton modificada que A deve escrever para estudar a dinâmica do objeto. Deixe explícito forças reais e forças de inércia na expressão. Discuta brevemente a ação qualitativa de cada um dos termos.
(3.0 pontos, 1.5 para a expressão e 1.5 para a discussão dos termos)
A deve incorporar os efeito de sua aceleração. Em geral, temos:

$$m_0\vec{a} = \sum \vec{F} - m_0[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \ddot{\vec{R}}_f]$$

Não há forças reais (0.5 pontos), o termo $\dot{\vec{\omega}}$é nulo (0.5 pontos). Notemos que $\vec{\omega} = \omega_0\hat{k}$, (perceba que este $\vec{\omega}$ coincinde com o $\vec{\omega}$ da nave (!), mas é devido o movimento circular uniforme de A), portanto:

$$m_0\vec{a} = -m_0[-\omega_0^2 r\hat{r} + 2\omega_0(\dot{r}\hat{\phi} - r\dot{\phi}\hat{r}) - R_0\omega_0^2\hat{r}]$$

(1.0 pontos, ou pode ser dada em cartesianas).

Em geral, apenas o termos de Coriolis e o termo devido a $\ddot{\vec{R}}_f = -R_0\omega_0^2\hat{r}$ são relevantes (0.5 pontos). O termo de Coriolis será responsável por um desvio da trajetória, enquanto que o termo centrífugo, age como uma força peso sobre a particula (1.0 pontos).
(dados: $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, e os demais por permutação ou $\hat{r} \times \hat{\phi} = \hat{k}$, e os demais por permutação).