Mec_2Sem2015 - Prova1_Solução&Critérios

Nome:____NUSP:___________

A cada exercício está atribuíd 10 pontos. A cada item 2.5 pontos. A nota de cada exercício é multiplicada por 10/3 e somada.

1 Ressonância em uma cadeia de moléculas diatômicas lineares

Uma boa aproximação para a energia potencial entre átomos de uma cadeia de moléculas lineares diatômicas é dada por expressões do tipo Lennard-Jones, como por exemplo:

$$U(x) = -\frac{a}{x^4} + \frac{b}{x^8}$$

onde x é a distância entre os átomos da cadeia e a e b são parâmetros positivos. Em um experimento de ressonância envolvendo uma cadeia de moléculas diatômicas, constituídas por átomos de massas M e m, o sistema foi resfriado de maneira que sua energia total fosse bastante próxima do mínimo da energia potencial. A cadeia foi então excitada por um laser de baixa potência que introduz na dinâmica de oscilações naturais desta cadeia uma força do tipo $F_0 \cos \omega t$.

(a) Faça um esboço de $U(x)$. Para que valores de energia estados ligados são possíveis? Anote no seu esboço resultados de outros itens deste problema.

(2.5 pontos) O esboço deve indicar claramente a existência de um mínimo e alguma justificativa para o aspecto geral do gráfico. -0.5 para quem fez a parte $x < 0$ (x é distância 1D). Apenas $E < 0$ que estados ligados são possíveis (0.5 pontos).

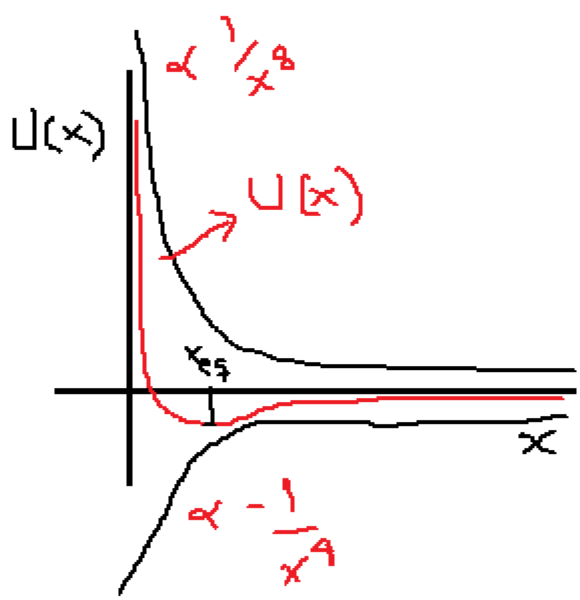

Figura 1: Esboço de $U(x)$.

(b) Encontre, em termos dos parâmetros a e b, a distância de equilíbrio entre os átomos da cadeia linear e a frequência ω_0 de pequenas oscilações em torno desta posição de equilíbrio. Considere $M \gg m$, de maneira que o átomo de massa M permanece em repouso enquanto o mais leve percorre o eixo x.

(2.5 pontos, 1.0 pontos a distância e 1.5 para a frequência)

A distância de equilíbrio ocorre para $dU(x)/dx|_{x=x_{eq}} = 0$ (+0.5 pontos), desta maneira:

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{4a}{x^5} - \frac{8b}{x^9}$$

$$\frac{4a}{x_{eq}^5} - \frac{8b}{x_{eq}^9} = 0$$

$$x_{eq}^4 = \frac{2b}{a}$$

(0.5 pontos) Para pequenas oscilações da massa m, calculamos a segunda derivada em $x = x_{eq}$ (0.5 pontos):

$$k = \frac{d^2U(x)}{dx^2}|_{x=x_{eq}} = \frac{-20a}{x^6} + \frac{72b}{x^{10}}|_{x=x_{eq}}$$

$$k = \frac{1}{x^8}[-20ax^2 + \frac{72b}{x^2}] = \frac{a^2}{4b^2}[-20a\sqrt{2b/a} + 72b\sqrt{a/2b}]$$

$$k = \frac{1}{x^8}[-20ax^2 + \frac{72b}{x^2}] = \frac{a^2}{4b^2}[-20a\sqrt{2b/a} + 36b\sqrt{2a/b}]$$

$$k = \frac{a^2}{4b^2}[16\sqrt{2ab}] = \frac{4\sqrt{2}a^{5/2}}{b^{3/2}}$$

Como apenas a massa m vibra (0.5 pontos), temos

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{4\sqrt{2}a^{5/2}}{mb^{3/2}}$$

(0.5 pontos; erros exclusivamente na álgebra: -0.25 pontos)

(c) A partir do experimento de ressonância, o seguinte gráfico da absorção de potência do laser como função da frequência foi elaborado:

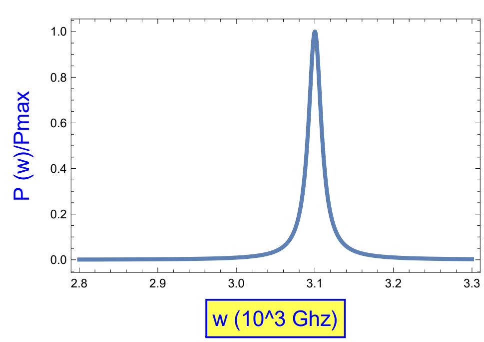

Figura 2: Gráfico para a ressonância de uma cadeia linear de moléculas.

Faça uma estimativa pelo gráfico para a frequência natural de oscilações ω_0. A distância de equilíbrio x_{eq} também pode ser obtida pode meio de *outros experimentos*. Indique como você pode obter os parâmetros a e b da energia $U(x)$ a partir dos resultados experimentais para x_{eq} e ω_0.

(2.5 pontos, 1.0 para ω_0 e 1.5 a discussão) Como se trata de um gráfico da potência, temos que o máximo ocorre para $\omega = \omega_0$. Desta maneira, $\omega_0 \approx 3.1$GHz é uma boa estimativa. Discussão: pelo item b, x_{eq} e ω_0 dependem de a e b apenas. Tendo os dois velores para ω_0 e x_{eq}, podemos resolver a seguinte equação:

$$\begin{cases} x_{eq} & = \frac{2b}{a} \\ \omega_0 & = \frac{4\sqrt{2}a^{5/2}}{mb^{3/2}} \end{cases}$$

e obter a e b.

(d) Ainda dentro da aproximação $M \gg m$, *proponha* uma eq. diferencial que descreva a dinâmica do átomo de massa m para pequenos deslocamentos da posição de equilíbrio. Justifique, brevemente, a presença de cada termo na equação diferencial. Estime parâmetros que possam ser estimados.

(2.5 pontos) A equação que rege a dinâmica neste caso se escreve:

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \cos \omega t$$

onde k foi calculado em b (0.5 pontos). Mas, pelo gráfico da ressonância, existe uma largura de linha, portanto, temos que incluir um termo de amortecimento:

$$m\ddot{x} = -kx - 2\beta + F_0 \cos \omega t$$

(1.0 pontos). Este termo, pode ser estimado pela largura de linha do gráfico de $\bar{P}(\omega)$, $2\beta = \Delta\omega \approx 0.04$ GHz (0.5 pontos).

2 Forças centrais

Duas partículas, massas m_1 e m_2 ($m_1 = 2m_2$), interagem por meio de uma força central cuja componente se escreve $f(r) = -Br^3$ ($\vec{F} = f(r)\hat{r}$).

(a) Dentre as quantidades energia, momento linear e momento angular, indique quais são conservadas para cada partícula do sistema. Para cada caso, escreva uma breve justificativa.
(2.5 pontos)
Energia: é conservada (0.25 pontos). Cada particula está sob ação de uma força central. Neste caso $\nabla \times \vec{F} = 0$ e, portanto, a energia de cada particula se conserva (0.5 pontos). *Momento linear:* não é conservado (0.25 pontos). Cada particula está sob ação de uma força, portanto, o momento linear de cada partícula não se conserva. Por exemplo, para 1, temos $d\vec{p}_1/dt = \vec{F}_{1(2)} \neq 0$ (0.5 pontos). *Momento angular:* em geral, não é conservado (0.5 pontos). O momento angular de cada particula conserva-se apenas quando medido do CM e não se conserva quando consideramos qualquer outro ponto como origem (1.0 pontos).

(b) Determine a energia potencial efetiva $V_{eff}(r)$ para o problema. Determine o valor de L_z para o movimento circular de raio a. Determine também o valor de $\dot{\theta}$ nesta mesma situação.
(2.5 pontos, 1.0 pontos para $V_{eff}(r)$ e 1.5 para L_z e $\dot{\theta}$).
Temos que $U(r) = (1/4)Br^4$ (0.5 pontos), dái encontramos:

$$V_{eff}(r) = \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{4}Br^4$$

(0.5 pontos). Para movimento circular de raio $r = a$, temos:

$$\frac{dV_{eff}}{dr}|_{r=a} = 0$$

(0.5 pontos). Desta maneira:

$$-\frac{L_z^2}{\mu r^3} + Br^3|_{r=a} = 0$$

$$L_z^2 = \mu B a^6$$

(0.5 pontos). Como sabemos, em geral, $L_z = \mu r^2\dot{\theta}$, portanto para o movimento circular de raio a, temos:

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{\mu B}a^3}{\mu a^2} = a\sqrt{\frac{B}{\mu}}$$

(0.5 pontos)

(c) Em um mesmo gráfico, faça 3 esboços da energia potencial efetiva como função de r considerando três valores L_1, L_2 e L_3 para L_z. Adote, necessariamente, $L_1 = 0$ e $L_3 > L_2 > 0$. Comente aspectos relevantes do gráfico (duas ou três afirmações são suficientes).
(2.5 pontos, 1.0 para o esboço, 1.5 para comentários): o esboço deve mostrar a ausência de MCU para $L_z = L_1$ e, com base no item *b*, mostrar que o ponto de equilíbrio se desloca para valores $\neq 0$ de L_z. Também deve mostrar que para r grande, o gráfico deve tender para $\propto r^4$, ou para $L_z = L_1$. Comentários: para $L_z = 0$ não há MCU possível (0.5 pontos). Para $L_z \neq 0$ sempre há um ponto de equilíbrio estável (0.5 pontos). Para $L_z \neq 0$, todo as trajetórias *são limitadas* (0.5 pontos). Para $L_3 > L_2$, o movimento circular é com raio maior (0.5 pontos), etc.

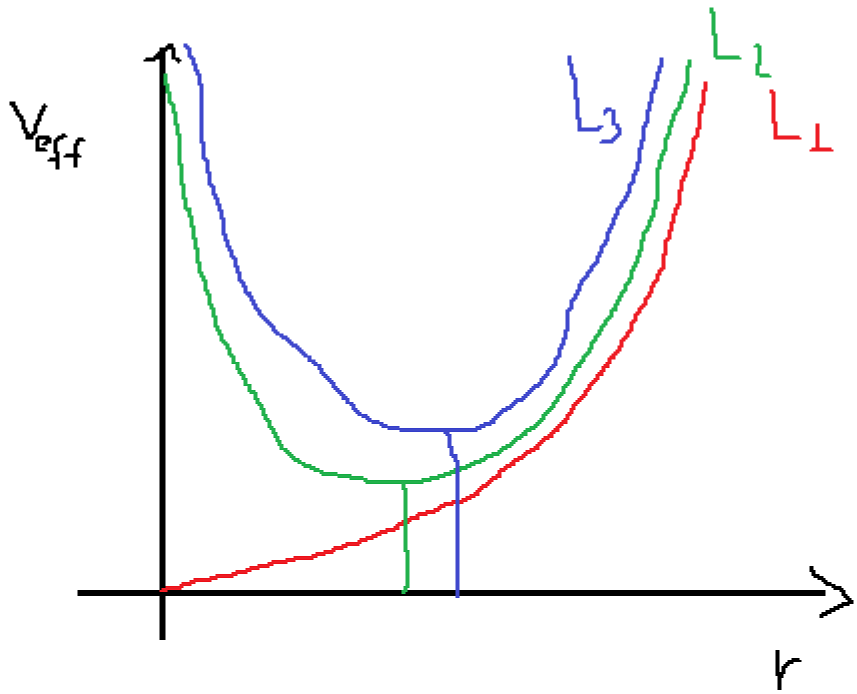

Figura 3: Esboço de $V_{eff}(r)$ para valores distintos de L_z.

(d) Considere $L_z \neq 0$ e produza diagramas de fases para as coordenadas r ($\dot{r} \times r$) e θ ($\dot{\theta} \times \theta$) para os casos de movimento circular uniforme (raio a) e pequenas vibrações em torno de a (são 4 diagramas ao todo). Aproxime que para pequenas vibrações $\dot{\theta}$ é igual ao do movimento circular uniforme.

(2.5 pontos, 0.5 para a coordenada θ e 2.0 para a coordenada r)

Coordenada θ: em ambos os casos $\dot{\theta}$ é constante (aproximação no enunciado), conforme determinado no item b, para qualquer θ, o espaço de fases é uma linha (0.5 pontos). Para a cordenada r: MCU, no MCU $\dot{r} = 0$ e $r = a$, o espaço de fases é apenas um ponto! (1.0 pontos). Pequenas vibrações: trata-se de um oscilador harmônico, em torno do ponto de equilíbrio ($r = a, \dot{r} = 0$), e é uma elipse (1.0 pontos)

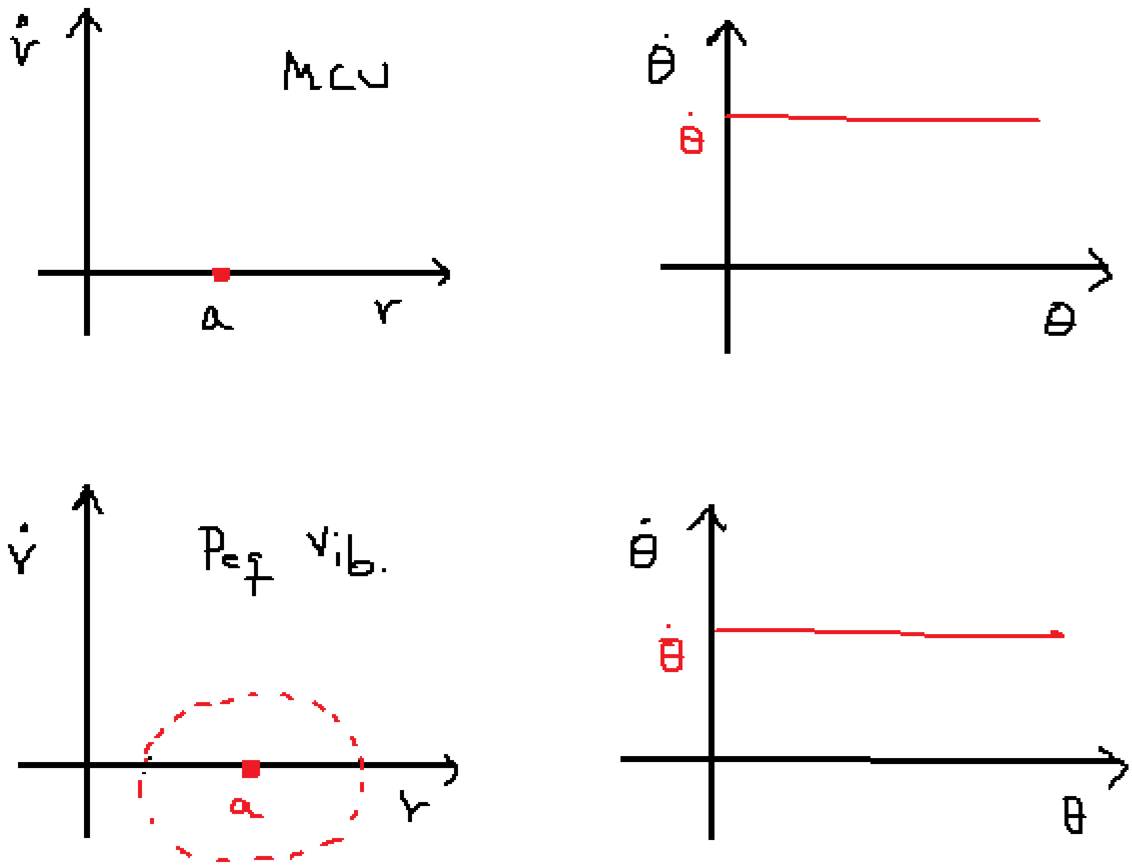

Figura 4: Esboço dos diagramas de fase.

(e) (até 0.5 pontos extra na prova) Produza, separadamente, um esquema descrevendo a dinâmica do sistema de duas partículas para a seguinte situação: $E = E_{min}$ e $L_z = L_2$. Adote $\vec{V}_{cm} = 0$ e inclua um tracejado para a trajetória de cada partícula. Indique ainda o vetor posição relativa e as velocidades e as acelerações de cada partícula (vetores) em dois pontos distintos da trajetória.

Em caso dúvidas, o esquema abaixo oferece um exemplo contendo elementos que devem estar presentes.

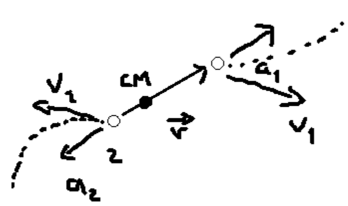

Figura 5: Exemplo para a dinâmica de um sistema de 2 partículas.

3 Nave espacial

Uma astronauta está em uma nave espacial, no espaço livre, e aciona o propulsor da nave que passa a fazer um movimento estritamente em uma única direção (que chamamos $\hat{i}$). A astronauta pede então a um colega, que encontra-se em sua mesma "altura", que jogue uma caneta em sua direção. O mesmo lança a caneta com velocidade estritamente na horizontal $v_{0x}\hat{i}$ ($v_{0x} > 0$). Considere que o combustível é ejetado a uma taxa constante de módulo α e a uma velocidade também constante de módulo u_e. Considere ainda que no início da manobra o sistema tem massa m_0.

(a) A astronauta está em um referencial inercial? Se sim, explique porque. Se não, determine a aceleração do referencial da astronauta (use explicitamente a notação vetorial).

(2.5 pontos). Certamente que o referencial da astronauta é acelerado (0.5 pontos). Esta aceleração é igual a aceleração da "nave" (0.5 pontos). No sistema de coordenadas proposto, temos: $\vec{u} = -u_e\hat{i}$ (0.5 pontos), daí ficamos com:

$$\vec{a}_R = \frac{u_e\alpha}{m_0 - \alpha t}\hat{i}$$

(1.0 pontos).

(b) Escreva a equação do movimento para descrever a *dinâmica da caneta*. Deixe claro qualquer força de inércia que possa ser necessária.

(2.5 pontos, 1.5 para a equação e 1.0 para a força de inércia).

Para a dinâmica da caneta temos:

$$m_C\vec{a} = \sum \vec{F} - m_C\vec{a}_R = \frac{-u_e\alpha}{m_0 - \alpha t}\hat{i}$$

(0.5 pontos)Igualando componentes, temos:

$$\ddot{x} = \frac{u_e\alpha}{m_0 - \alpha t}$$

(1.0 pontos)A força de inércia:

$$\vec{F}^{inercia} = \frac{-m_C u_e\alpha}{m_0 - \alpha t}\hat{i}$$

onde m_C é a massa da caneta, foi utilizada (1.0 pontos).

(c) Resolva as equações para encontrar $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ para a caneta. Considere a seguinte aproximação: $ln(1-\delta) \approx -\delta$ para $\delta \ll 1$. Justifique porque o seu "δ" é tal que "δ" $\ll 1$. A astronauta que observa o movimento percebe que a caneta "cai" alguns centímetros (na direção $-\hat{j}$, ver figura). A caneta poderia ter "caído" de acordo com seu modelo?

(2.5 pontos, 2.0 para a solução e 0.5 para a justificativa do δ).

Resolvemos por separação de variáveis:

$$v_x(t) - v_0 = -u_e \ln(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0})$$

$$v_x(t) - v_0 = -u_e \ln(1 - \frac{\alpha t}{m_0})$$

É razoável supor: $\alpha t \ll m_0$, pois para uma manobra costumeira, m_0 é tipicamente muito maior que o combustível espelido. Daí temos:

$$v_x(t) - v_0 \approx u_e\alpha t/m_0$$

$$x(t) = x_0 + \frac{u_e \alpha}{m_0}\frac{t^2}{2} + v_0 t$$

Desta maneira:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + \frac{u_e \alpha}{m_0}\frac{t^2}{2} + v_0 t)\hat{\imath} + y_0 \hat{\jmath}$$

(1.5 pontos). A caneta não poderia ter caído (0.5 pontos).

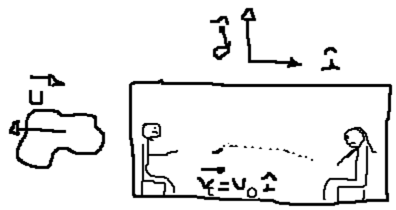

Figura 6: Esquema da situação descrita no problema. A linha tracejada exagera o desvio (em relação a horizontal) da trajetória da caneta que possui velocidade inicial $\vec{v} = v_{0x}\hat{\imath}$, com $v_{0x} > 0$.

(d) A observação que a caneta caiu alguns centímetros merece atenção. Explicações foram elaboradas:
(2.5 pontos, possíveis pontuação abaixo. Note que o total é 2.5 pontos.)

(1) Emergência! Vamos olhar para a janela pois estamos próximos a um planeta que está, efetivamente, acelerando a caneta.
Explicação errada: uma força peso externa teria a mesma aceleração sobre o referencial e sobre a caneta. Portanto, esta situação não poderia causar uma queda aparente da caneta. (0.75 pontos)
(2) A caneta foi polarizada por atrito e está sendo atraída por forças eletrostáticas por uma das paredes da nave (digamos o "chão").
Explicação plausível: uma força como esta implica no aparecimento de um termo assocido as forças reais $\sum \vec{F}$ e poderia causar o efeito.
(3) Emergência. Nossa nave está sendo atacada por uma espécie Alien, que a está puxando com um raio trator! (0.75 pontos)
Requer elaboração: um mecanismo para o possível raio trator deve ser pensando. Se o raio atua sobre a nave por meio de uma interação não gravitacional, seria razoável. Mas se for por meio de alguma interação gravitacional, certamente que não. Outro ponto, é que bastante pouco provável que uma nave humana venha a encontrar uma espécie Alien. Esta seria uma péssima tomada de decisão. (1.0 pontos)
Outra elaboração: Um ponto provável é que o motor está mal calibrado, o que levaria a um propulsão também na direção $\hat{\jmath}$, ou mesmo a causar um torque no sistema. O torque implica o aparecimento de um termo de Coriolis. A rotação tem que ser no sentido anti-horário para que ocorra um efeito apreciável (2.0 pontos).

Refute ou dê suporte a cada uma das explicações. Alternativamente, elabore uma outra explicação que julgue melhor. Você ganha pontos caso consiga refutar e/ou dar suporte a qualquer uma destas explicações.

Formulário

A priori, você vai utilizar, ou pensar sobre, estas fórmulas para resolver os exercícios da prova.

Derivada útil:

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^m}) = \frac{-m}{x^{m+1}}$$

Potência média absorvida em um ciclo do oscilador:

$$\bar{P}(\omega) = \frac{(F_0^2/m)\beta\omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2]}$$

Energia potencial devido a forças centrais:

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} f(r')dr'$$

Energia total para forças centrais:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

Energia potencial efetiva:

$$V_{eff}(r) = \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

Equação do foguete:

$$m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\frac{dm(t)}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

onde $m(t)$ é a massa da "nave".

Integral útil:

$$\int_0^t \frac{a}{b-at}dt = -[\ln(b-at)|_0^t]$$