Mec_2Sem2015 - Prova2

Nome:____NUSP:___________

Você tem até 120 minutos para fazer esta prova. Resolva os exercícios de maneira organizada. Cada exercício vale 10/3 da prova. O Item $2(d)$ é um item extra e pode acrescentar até 0.5 pontos à nota da prova. Bom trabalho.

Dica geral I: caso você não consiga deduzir um resultado anterior necessário a um item, escreva explicitamente no item em consideração o que está faltando e siga em frente.

Dica geral II: muito cuidado com comentários qualitativos. Seja objetiv@ e rigoros@ com os conceitos.

1 Partícula em uma espiral

Uma partícula de massa m está restrita a mover-se na superfície de um cilindro reto de raio $r = a$. A partícula também está sob influência da gravidade ($U = mgz$).

(a) Escolha coordenadas generalizadas e escreva a lagrangiana para a partícula. O número de coordenadas do seu resultado deve ser igual ao número de graus de liberdade da partícula.

(b) A partícula está sujeita a um segundo vínculo, tal que $z = k\phi$ onde $k > 0$ é constante e z e ϕ são coordenadas cilíndricas usuais. Mostre que os momentos generalizados p_z e p_ϕ não são conservados. Interprete a natureza destes momentos.

(c) Determine a equação de movimento de Lagrange para a coordenada ϕ e resolva a equação do movimento com condições iniciais $\phi(t = 0) = 0$ e $\dot{\phi}(t = 0) = 0$ (dica: não perca seu tempo... neste item, você não quer informações sobre os vínculos).

Partícula em uma espiral

2 Partícula no cone

Considere o problema, exaustivamente abordado no curso, de uma partícula de massa m restrita a mover-se na superfície de um cone de meio ângulo α. Devido o vinculo $g(z,r) = z - r\cot\alpha = 0$, a lagrangiana deste problema se escreve:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2(1+\cot^2\alpha) + \frac{m}{2}r^2\dot{\phi}^2 - mgr\cot\alpha$$

Se um mecanismo gira o cone, e portanto a partícula, em torno de seu eixo central com velocidade $\omega > 0$ constante, temos que $\dot{\phi} = \omega$ e, portanto, a lagrangiana se escreve:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2(1+\cot^2\alpha) + \frac{m}{2}r^2\omega^2 - mgr\cot\alpha$$

(a) Deduza a hamiltoniana da partícula nessa situação e mostre que $\mathcal{H}$ é uma constante do movimento.

(b) Investigue a possibilidade de movimento circular de raio r_0 e ainda a estabilidade desta órbita (use o método de sua preferência).

(c) Liste e classifique os pontos fixos do problema. Faça um esboço do espaço de fases (veja o formulário abaixo). Há a possibilidade de uma bifurcação, com respeito ao parâmetro ω, neste sistema ? Discuta.

(d) *(Até 0.5 pontos extras):* mostre que a energia mecânica total deste sistema *não se conserva*.

Partícula no cone

3 Pertubação quártica

A energia potencial de uma partícula de massa m se escreve:

$$U(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{4}\frac{\delta}{a^2}r^4$$

onde a é uma constante com unidade de comprimento, $k > 0$, $\delta > 0$ e o termo quártico é uma *pequena* correção ao termo harmônico ($\delta \ll k$).

(a) Para ordem zero em δ (ou seja, para $\delta = 0$), determine o momento angular L_z^2 desta partícula para movimento circular de raio r_0 (*dica:* você pode usar o método de sua preferência, mas um potencial efetivo pode ser definido, com a devida justificativa, facilmente). Calcule também a frequência $\dot{\phi}_0$ de revolução.

(b) Deduza uma expressão para a frequência ω_r^2 de pequenas vibrações em torno do raio de movimento circular r_0 (considere $\delta \neq 0$). Adote como aproximação o valor de L_z^2 encontrado no item (a) e escreva uma expressão para ω_r em até primeira ordem em δ (considere que a constante a é da ordem de r_0 e lembre que $\delta \ll k$).

(c) Analise o comportamento da órbita na situação de pequenas oscilações e para $\delta \neq 0$ (é aberta ou fechada? é estável? qual o sentido de precessão?)

Pertubação quártica

Formulário

A priori, você vai utilizar, ou pensar sobre, estas fórmulas para resolver os exercícios da prova.

Velocidades em coordenadas cilíndricas:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$$

Definição da Lagrangiana

$$\mathcal{L} = T - U$$

Eqs. de movimento de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Eqs. de movimento de Lagrange (na presença de vínculos)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_j} & = 0 \\ g_k(q_j) & = 0 \end{cases}$$

Forças de vínculo generalizadas:

$$Q_k = \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_j}$$

Momentos generalizados:

$$p_{q_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

Hamiltoniana (deve ser função de q_j e p_{q_j}):

$$\mathcal{H} = \sum_j \dot{q}_j p_{q_j} - L$$

Eqs. canônicas do movimento:

$$\begin{cases} \dot{q}_j & = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \\ \dot{p}_{q_j} & = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} & = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{cases}$$

Autovalores e autovetores da matriz 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_\pm & = \pm\sqrt{bc} \\ \vec{u}_\pm & = \begin{pmatrix} \pm(b/c)^{1/2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Aproximações importantes ($x \ll 1$):

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

Hamiltoniana para forças centrais (para 2 corpos, basta substituir m por μ):

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + U(r)$$