Mec_2Sem2015 - Prova2_Sub

Nome:____NUSP:___________

Você tem até 120 minutos para fazer esta prova. Resolva os exercícios de maneira organizada. Cada exercício vale 10/3 da prova. O Item 2(d) é um item extra e pode acrescentar até 0.5 pontos à nota da prova. Bom trabalho.

Dica geral I: caso você não consiga deduzir um resultado anterior necessário a um item, escreva explicitamente no item em consideração o que está faltando e siga em frente.

Dica geral II: muito cuidado com comentários qualitativos. Seja objetiv@ e rigoros@ com os conceitos.

1 Forças de vínculo

A dinâmica de uma partícula de massa m é descrita por duas coordenadas generalizadas, x e θ, relacionadas pela seguinte equação de vínculo:

$$g(x,\theta) = Ax - B\theta = 0$$

onde A e B são constantes, A é adimensional e B tem dimensão de comprimento. A coordenada generalizada x tem dimensão de comprimento. A lagrangiana deste sistema se escreve:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 - mgx$$

onde $l > 0$ é uma constante.

(a) Escreva as equações de movimento de Lagrange na presença do vínculo $g(x,\theta)$.

(b) Encontre o multiplicador de Lagrange λ e as forças generalizadas de vínculo Q_x e Q_θ.

(c) Analise a conservação dos momento generalizados p_x e p_θ.

(d) Interprete a natureza das forças de vínculo Q_x e Q_θ.

Forças de vínculo

2 Pêndulo simples

Considere um pêndulo simples, de comprimento l, massa m, acoplado a um dispositivo que exerce um torque constante $\tau_0 > 0$ sobre o mesmo. A hamiltoniana deste problema se escreve:

$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta - \tau_0\theta$$

(a) A hamiltoniana é uma constante do movimento? Justifique. Deduza as equações canônicas do movimento.

(b) Investigue a existência de pontos fixos no intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Classifique eventuais pontos fixos ou mostre explicitamente que não existem pontos fixos neste problema (veja formulário para autovalores). .

(c) Faça um esboço do espaço de fases para regiões próximas de eventuais pontos fixos (veja formulário para autovetores). Analise a possibilidade de bifurcações neste problema com respeito ao parâmetro τ_0 (há uma bifurcação? Qual o torque crítico τ_C? Como interpretar a bifurcação?).

(d) *(Até* 0.5 *pontos extras):* mostre que a energia mecânica total deste sistema não se conserva.

Pêndulo simples

3 Potencial $-kr^{-4}$

A energia potencial de uma partícula de massa m se escreve:

$$U(r) = -\frac{k}{4}r^{-4}$$

onde r é a distância da partícula ao centro da força e $k > 0$ é uma constante.

(a) Escreva a lagrangiana do sistema e encontre os momentos generalizados. Interprete a natureza destes momentos e discuta sua conservação. Deduza a hamiltoniana da partícula e mostre que $\mathcal{H}$ é conservada. Discuta a conservação da energia mecânica da partícula.

(b) Estude a estabilidade da partícula nesse problema; isto é, investigue se existe uma órbita circular r_0 e se esta órbita é estável (use o método de sua preferência).

(c) Para para um dado sistema de unidades (L, para comprimento, T para tempo e M para massa), os parâmetros e condições iniciais do problema se escrevem $m = 1$ M, $k = 2$ MT^{-2}L^{-3}, $\vec{r}_0 = 25\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$ L e $\vec{v}_0 = 50\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}$ L/T. Discuta a dinâmica desta partícula em termos gerais.

Potencial $-kr^{-4}$

Formulário

A priori, você vai utilizar, ou pensar sobre, estas fórmulas para resolver os exercícios da prova.

Definição da Lagrangiana

$$\mathcal{L} = T - U$$

Eqs. de movimento de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Eqs. de movimento de Lagrange (na presença de vínculos)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_j} & = 0 \\ g_k(q_j) & = 0 \end{cases}$$

Forças de vínculo generalizadas:

$$Q_j = \lambda_j \frac{\partial g_k}{\partial q_j}$$

Momentos generalizados:

$$p_{q_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

Hamiltoniana (deve ser função de q_j e p_{q_j}):

$$\mathcal{H} = \sum_j \dot{q}_j p_{q_j} - L$$

Eqs. canônicas do movimento:

$$\begin{cases} \dot{q}_j & = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \\ \dot{p}_{q_j} & = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} & = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \end{cases}$$

Autovalores e autovetores da matriz 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_\pm & = \pm\sqrt{bc} \\ \vec{u}_\pm & = \begin{pmatrix} \pm(b/c)^{1/2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Aproximações importantes ($x \ll 1$):

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$