Mec_2Sem2015 - Prova2_Sub_Solução&Critérios

Nome:____NUSP:___________

Você tem até 120 minutos para fazer esta prova. Resolva os exercícios de maneira organizada. Cada exercício vale 10/3 da prova. O Item 2(d) é um item extra e pode acrescentar até 0.5 pontos à nota da prova. Bom trabalho.

Dica geral I: caso você não consiga deduzir um resultado anterior necessário a um item, escreva explicitamente no item em consideração o que está faltando e siga em frente.

Dica geral II: muito cuidado com comentários qualitativos. Seja objetiv@ e rigoros@ com os conceitos.

1 Forças de vínculo

A dinâmica de uma partícula de massa m é descrita por duas coordenadas generalizadas, x e θ, relacionadas pela seguinte equação de vínculo:

$$g(x,\theta) = Ax - B\theta = 0$$

onde A e B são constantes, A é adimensional e B tem dimensão de comprimento. A coordenada generalizada x tem dimensão de comprimento. A lagrangiana deste sistema se escreve:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 - mgx$$

onde $l > 0$ é uma constante.

(a) Escreva as equações de movimento de Lagrange na presença do vínculo $g(x,\theta)$.
(2.0 pontos, -0.5 pontos para qualquer erro)

$$\begin{cases} -mg - m\ddot{x} + \lambda A &= 0 \\ -ml^2\ddot{\theta} - \lambda B &= 0 \\ Ax - B\theta &= 0 \end{cases}$$

(b) Encontre o multiplicador de Lagrange λ e as forças generalizadas de vínculo Q_x e Q_θ.
(4 pontos, 3 para λ, 1 para as forças)
Usamos a equação de vínculo para obter:

$$A\ddot{x} - B\ddot{\theta} = 0$$

Substituímos esta expressão nas eqs. do movimento:

$$\begin{cases} -mg - m\ddot{x} + \lambda A &= 0 \\ -ml^2\ddot{\theta} - \lambda B &= 0 \\ A\ddot{x} - B\ddot{\theta} &= 0 \end{cases}$$

Ou ainda:

$$\begin{cases} -mg - m\ddot{x} + \lambda A &= 0 \\ -ml^2(\frac{A}{B})\ddot{x} - \lambda B &= 0 \end{cases}$$

Temos agora uma eq. para $\ddot{x}$ e λ. Para eliminar $\ddot{x}$, usamos o seguinte velho truque: multiplicamos a primeira linha por $-l^2(A/B)$ e somamos as duas linhas:

$$\begin{cases} (l^2\frac{A}{B})mg + (l^2\frac{A}{B})m\ddot{x} - (l^2\frac{A}{B})\lambda A & = 0 \\ -ml^2(\frac{A}{B})\ddot{x} - \lambda B & = 0 \end{cases}$$

Somando as duas linhas:

$$(l^2\frac{A}{B})mg - (l^2\frac{A}{B})\lambda A - \lambda B = 0$$

Resolvendo para λ

$$-\lambda(B + l^2\frac{A^2}{B}) = -l^2(mg\frac{A}{B})$$

$$\lambda = \frac{l^2(mg\frac{A}{B})}{(l^2\frac{A^2}{B} + B)}$$

$$\lambda = \frac{l^2 mgA}{l^2A^2 + B^2}$$

(3.0 pontos, -1.0 para erros algébricos). Decorre deste valor que:

$$Q_x = \lambda A = \frac{l^2 mgA^2}{l^2A^2 + B^2}$$

$$Q_\theta = -\lambda B = -\frac{l^2 mgAB}{l^2A^2 + B^2}$$

(1.0 pontos para as forças)

(c) Analise a conservação dos momento generalizados p_x e p_θ.
(2.0 pontos)
Diretamente da equação do movimento, temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_j} = 0$$

Para p_x, temos:

$$-mg - \frac{d}{dt}p_x + Q_x = 0$$

Portanto, p_x não é conservado (1.0 pontos). Um desenvolvivmento similar, mostra que o mesmo pode ser dito sobre p_θ (1.0 pontos).

(c) Interprete a natureza das forças de vínculo Q_x e Q_θ.
(2.0 pontos, 1.0 para cada afirmação)
Primeiro notamos que λ tem dimensões de força.

$$Q_x = \lambda A = \frac{l^2 mgA^2}{l^2A^2 + B^2}$$

Por análise dimensional (tem que mostrar a análise): Q_x é uma força

$$Q_\theta = -\lambda B = -\frac{l^2 mgAB}{l^2A^2 + B^2}$$

Por análise dimensional (tem que mostrar a análise): Q_θ é um torque.
Sem mostras a análise (-1.0 pontos)

2 Pêndulo simples

Considere um pêndulo simples, de comprimento l, massa m, acoplado a um dispositivo que exerce um torque constante $\tau_0 > 0$ sobre o mesmo. A hamiltoniana deste problema se escreve:

$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta - \tau_0\theta$$

(a) A hamiltoniana é uma constante do movimento? Justifique. Deduza as equações canônicas do movimento. (2.0 pontos)
Pelas equações canônicas sabemos que:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}$$

como $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$, temos que $\mathcal{H}$ se conserva (1.0 pontos). Há um único par de eqs. canônicas a ser deduzido:

$$\begin{cases} \dot{\theta} & = p_\theta/ml^2 \\ \dot{p}_\theta & = -(mgl\sin\theta - \tau_0) \end{cases}$$

(1.0 pontos)

(b) Investigue a existência de pontos fixos no intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Classifique eventuais pontos fixos ou mostre explicitamente que não existem pontos fixos neste problema (veja formulário para autovelores).
(4.0 pontos, 2.0 para os pontos fixos, 2.0 para a classificação)
Usando as equações canônicas do item (a), podemos achar os pontos fixos. Os mesmos ocorrem para:

$$\begin{cases} 0 & = p_\theta^*/ml^2 \\ 0 & = -(mgl\sin\theta^* - \tau_0) \end{cases}$$

(0.5 pontos pela condição para ponto fixo). Portanto os pontos fixos ocorrem para $p_\theta^* = 0$ e θ^* tal que $\sin\theta^* = \tau_0/mgl$. No intervalo $-\pi$ a π, são dois ângulos: θ^* e $\pi - \theta^*$. Portanto, são dois pontos fixos (2.0 pontos). A classificação dos mesmo decorre da matriz Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/ml^2 \\ -mgl\cos\theta^* & 0 \end{pmatrix}$$

De maneira que:

$$\lambda^2 + \frac{g}{l}\cos\theta^* = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{g}{l}\cos\theta^*$$

Note que: $\cos\theta^* = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta^*}$. O sinal $+$ é para $\theta^* < \pi/2$ e o negativo para $\pi - \theta^*$. Para o primeiro, temos que:

$$\lambda^2 = -\frac{g}{l}\sqrt{1-\sin^2\theta^*}$$

Portanto, λ é imaginário puro, e o ponto fixo é um centro (1.0 pontos). Para $\pi - \theta^*$, temos:

$$\lambda^2 = \frac{g}{l}\sqrt{1-\sin^2\theta^*}$$

e λé real, com sinais trocados, portanto o ponto fixo é uma sela (1.0 pontos).

(c) Faça um esboço do espaço de fases para regiões próximas de eventuais pontos fixos (veja formulário para autovetores). Analise a possibilidade de bifurcações neste problema com respeito ao parâmetro τ_0 (há uma bifurcação? Qual o torque crítico τ_C? Como interpretar a bifurcação?).

(4.0 pontos, 2.0 pontos para o esboço, 2.0 pontos para a análise da bifurcação)

O esboço deve mostrar as órbitas para regiões próximas do centro e a ligação de sela no ponto instável com as direções corretas associadas aos autovetores (2.0 pontos).

Sobre a bifurcação, devemos notar que a solução para θ^* se escreve $\sin\theta^* = \tau_0/mgl$. Portanto, só temos ponto fixo para $\tau_0 < mgl$. Assim, há uma bifurcação no sistema e $\tau_c = mgl$ (1.0 pontos). Para $\tau > \tau_c$ não há pontos fixos no espaço de fases, e o pêndulo executa "rotações" (0.5 pontos). Neste caso, o torque τ_0 é maior que o torque máximo exercido pelo peso (0.5 pontos).

(d) *(Até 0.5 pontos extras):* mostre que a energia mecânica total deste sistema não se conserva.

3 Potencial $-kr^{-4}$

A energia potencial de uma partícula de massa m se escreve:

$$U(r) = -\frac{k}{4}r^{-4}$$

onde r é a distância da partícula ao centro da força e $k > 0$ é uma constante.

(a) Escreva a lagrangiana do sistema e encontre os momentos generalizados. Interprete a natureza destes momentos e discuta sua conservação. Deduza a hamiltoniana da partícula e mostre que $\mathcal{H}$ é conservada. Discuta a conservação da energia mecânica da partícula.
(4 pontos, 2.5 para $\mathcal{L}$ e os momentos, 1.5 para $\mathcal{H}$ e a energia)
Novamente, lidamos com um potencial central, logo podemos escrever o problema em coordenadas polares.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{4}kr^{-4}$$

(0.5 pontos). Momentos generalizados:

$$p_r = m\dot{r}$$

$$p_\phi = mr^2\dot{\phi}$$

(0.5 pontos). O momento p_r é a componente r do momento linear e p_ϕ é a componente z do momento angular (0.5 pontos). A análise pela equação de movimento de Lagrange mostra que p_r não se conserva, mas que p_ϕ se conserva (1.0 pontos).
A partir da definição (ou com argumentos rigorosos), calculamos $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \dot{r}p_r + \dot{\phi}p_\phi - \mathcal{L}$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - \frac{1}{4}kr^{-4}$$

(0.5 pontos). Notamos que $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$, como $\partial\mathcal{H}/\partial t = d\mathcal{H}/dt$, temos que $\mathcal{H}$ é conservada (0.5 pontos). Notamos que $\mathcal{H} = E$, portanto, E é conservada (0.5 pontos). *Nota: você não pode partir* do fato que $\mathcal{H} = E$ sem o devido argumento/demonstração. Perceba que foi deduzido que $\mathcal{H} = T + U$, e este fato usado no final, pois sempre temos $E = T + U$.

(b) Estude a estabilidade da partícula nesse problema; isto é, investigue se existe uma órbita circular r_0 e se esta órbita é estável (use o método de sua preferência).
(4.0 pontos, 1.0 para o método e seu desenvolvimento. 1.5 para r_0 e 1.5 para a estabilidade).
Uma solução possivel: podemos definir um potencial efetivo $V_{eff}(r)$, notando que $\mathcal{H}$ é constante. Notemos ainda que $p_\phi = L_z$, de maneira que:

$$V_{eff}(r) = \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{1}{4}kr^{-4}$$

Procedemos como usualmente: para r_0 temos:

$$V'_{eff}(r_0) = \left(\frac{-L_z^2}{mr^3} + \frac{k}{r^5}\right)\Big|_{r=r_0} = 0$$

$$r_0^2 = \frac{mk}{L_z^2}$$

Portanto, há possibilidade de movimento circular de raio r_0 para $L_z \neq 0$ (1.5 pontos). Analisando a segunda derivada, temos:

$$V''_{eff}(r_0) = (\frac{3L_z^2}{mr^4} - \frac{5k}{r^6})|_{r=r_0}$$

$$= \frac{3L_z^6}{m^3k^2} - \frac{5L_z^6}{m^3k^2} = -\frac{2L_z^6}{m^3k^2} < 0$$

Logo o ponto é instável (1.5 pontos). Nota: o "método" avalia a sequência lógica de definir e aplicar um potencial efetivo (1.0 pontos), ou qualquer outro método.

(c) Para para um dado sistema de unidades (L, para comprimento, T para tempo e M para massa), os parâmetros e condições iniciais do problema se escrevem $m = 1$ M, $k = 2$ MT^{-2}L^{-3}, $\vec{r}_0 = 25\hat{i} + 5\hat{j}$ L e $\vec{v}_0 = 50\hat{i} + 10\hat{j}$ L/T. Discuta a dinâmica desta partícula em termos gerais.

(2.0 pontos)

Notemos que:

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = 0\hat{k}$$

Como o momento se conserva, este valor é o mesmo em toda dinâmica. Para $L_z = 0$, não há movimento circular (1.0 pontos). Nesta caso, a massa m é atraída até o centro da força (1.0 pontos).