Mec_2Sem2015 - Prova2_Solução&Critérios

Nome:____NUSP:____________

Você tem até 120 minutos para fazer esta prova. Resolva os exercícios de maneira organizada. Cada exercício vale 10/3 da prova. O Item 2(d) é um item extra e pode acrescentar até 0.5 pontos à nota da prova. Bom trabalho.

Dica geral I: caso você não consiga deduzir um resultado anterior necessário a um item, escreva explicitamente no item em consideração o que está faltando e siga em frente.

Dica geral II: muito cuidado com comentários qualitativos. Seja objetiv@ e rigoros@ com os conceitos.

1 Partícula em uma espiral

Uma partícula de massa m está restrita a mover-se na superfície de um cilindro reto de raio $r = a$. A partícula também está sob influência da gravidade ($U = mgz$).

(a) Escolha coordenadas generalizadas e escreva a lagrangiana para a partícula. O número de coordenadas do seu resultado deve ser igual ao número de graus de liberdade da partícula.

(2.0 pontos)

Da definição temos:

$$\mathcal{L} = T - U$$

Considerando as coordenadas cilindricas usuais como coordenadas generalizadas, temos:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Uma vez que $r = a$, temos $\dot{r} = 0$, desta maneira:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(a^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

(-0.5 pontos se deixou $\dot{r}$)

(b) A partícula está sujeita a um segundo vínculo, tal que $z = k\phi$ onde $k > 0$ é constante e z e ϕ são coordenadas cilíndricas usuais. Mostre que os momentos generalizados p_z e p_ϕ não são conservados. Interprete a natureza destes momentos.

(4.0 pontos, 2.5 para a análise da conservação, 1.5 para a interpretação)

EXISTEM PELO MENOS DUAS SOLUÇÕES, solução mais comum:

(2.5 pontos)

Observamos que as equações do movimento de Lagrange se escrevem:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

lembramos que os momentos generalizados se escrevem $p_q = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$. De maneira que:

$$\dot{p}_q = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

Implementando os vinculos, podemos escrever a lagrangiana para z ou ϕ. Para z temos:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(a^2\frac{1}{k^2}\dot{z}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Para ϕ temos:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(a^2\dot{\phi}^2 + k^2\dot{\phi}^2) - mgk\phi$$

Portanto, para ambas as coordenadas z e ϕ temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \neq 0$$

De maneira que:

$$\dot{p}_q \neq 0$$

para $q = \phi$ ou z.
OUTRA SOLUÇÃO:
A equação de vínculo se escreve:

$$g(z, \phi) = z - k\phi = 0$$

Na presença dos vinculos, temos:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \phi} & = 0 \\ -mg - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} & = 0 \\ z - k\phi & = 0 \end{cases}$$

Que pode ser resolvida para encontrar λ:

$$\begin{cases} -ma^2\ddot{\phi} - \lambda k & = 0 \\ -mg - m\ddot{z} + \lambda & = 0 \\ \ddot{z} - k\ddot{\phi} & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -ma^2\ddot{\phi} - \lambda k & = 0 \\ -mg - mk\ddot{\phi} + \lambda & = 0 \\ \ddot{z} & = k\ddot{\phi} \end{cases}$$

$$-mg + (1 + \frac{k^2}{a^2})\lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{a^2}{a^2 + k^2} mg$$

Agora, lembramos que $p_q = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$, portanto:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}p_\phi - \lambda k & = 0 \\ -mg - \frac{d}{dt}p_z + \lambda & = 0 \end{cases}$$

Daí, ambos momentos *não são conservados* (2.5 pontos). Note que apenas escrever estas últimas expressões não é suficiente. É claro que p_ϕ não se conserva, mas p_z não é claro (foi atribuído 2.0 pontos, ou seja, -0.5 pontos).
INTERPRETAÇÃO (1.5 pontos):
O momento p_ϕ deve ser interpretado como a componente z do momento angular da partícula, enquanto que p_z é a componente z do momento linear (1.5 pontos, 0.75 para cada). Atenção: momento angular é definido em relação a um ponto, não há um eixo. Não existe momento angular em torno de z.

(c) Determine a equação de movimento de Lagrange para a coordenada ϕ e resolva a equação do movimento com condições iniciais $\phi(t = 0) = 0$ e $\dot{\phi}(t = 0) = 0$ (dica: não perca seu tempo... neste item, você não quer informações sobre os vínculos).

(4.0 pontos)
Inspirandos na dica, escrevemos:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(a^2\dot{\phi}^2 + k^2\dot{\phi}^2) - mgk\phi$$

A equação de movimento de Lagrange se escreve:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0$$

$$-mgk - m(a^2 + k^2)\ddot{\phi} = 0$$

(2.0 pontos, -0.5 para erros algébricos)

$$\ddot{\phi} = \frac{-gk}{(a^2 + k^2)}$$

Cuja solução, com as condições iniciais corretas:

$$\phi(t) = \frac{-gk}{(a^2 + k^2)}\frac{t^2}{2}$$

(2.0 pontos, -1.0 pontos para erro devido as condiçõe iniciais)

2 Partícula no cone

Considere o problema, exaustivamente abordado no curso, de uma partícula de massa m restrita a mover-se na superfície de um cone de meio ângulo α. Devido o vinculo $g(z,r) = z - r\cot\alpha = 0$, a lagrangiana deste problema se escreve:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2(1+\cot^2\alpha) + \frac{m}{2}r^2\dot{\phi}^2 - mgr\cot\alpha$$

Se um mecanismo gira o cone, e portanto a partícula, em torno de seu eixo central com velocidade ω constante, temos que $\dot{\phi} = \omega$ e, portanto, a lagrangiana se escreve:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2(1+\cot^2\alpha) + \frac{m}{2}r^2\omega^2 - mgr\cot\alpha$$

(a) Deduza a hamiltoniana da partícula nessa situação e mostre que $\mathcal{H}$ é uma constante do movimento.
(2.0 pontos, 1.5 para $\mathcal{H}$ e 0.5 para a conservação)
A hamiltoniana para este sistema é encontrada pela definição:

$$\mathcal{H} = \dot{r}p_r - \mathcal{L}$$

Primeiro, calculamos $p_r = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{r}$:

$$p_r = m\dot{r}(1+\cot^2\alpha)$$

Em seguida, substituímos na expressão:

$$= \frac{p_r^2}{m(1+\cot^2\alpha)} - [\frac{m}{2}\frac{p_r^2}{m^2(1+\cot^2\alpha)} - \frac{m}{2}r^2\omega^2 - mgr\cot\alpha]$$

$$= \frac{p_r^2}{2m(1+\cot^2\alpha)} - \frac{m}{2}r^2\omega^2 + mgr\cot\alpha$$

(1.5 pontos, -0.5 para erros algébricos). Como

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}$$

Temos que $\mathcal{H}$ se conserva (0.5 pontos).

(b) Investigue a possibilidade de movimento circular de raio r_0 e ainda a estabilidade desta órbita (use o método de sua preferência).
(4.0 pontos, 2.0 para r_0 e 2.0 para a estabilidade)
Solução possível:
Tomando vantagem que $\mathcal{H}$ é constante, definimos o potencial efetivo:

$$V_{eff}(r) = -\frac{m}{2}r^2\omega^2 + mgr\cot\alpha$$

Um esboço do potencial (cujo gráfico deve estar bem justificado) revela imediatamente a possibilidade de movimento circular de raio r_0 (2.0 pontos) e que a órbita é instável (2.0 pontos). Alternativamente, pode-se derivar $V_{eff}(r)$ para encontrar e classificar o ponto de equlíbrio.

$$-mr_0\omega^2 + mg\cot\alpha = 0$$

de maneira que $r_0 = g\cot\alpha/\omega^2$ (2.0 pontos). E fazer a segunda derivada:

$$-m\omega^2 < 0$$

Ou seja, órbita instável (2.0 pontos). Pode-se ainda usar equações de Lagrange, etc, etc, ou analisar as equações canônicas desde de ponto vista da análise de pontos físxos e da matriz Jacobiana.

(c) Liste e classifique os pontos fixos do problema (você pode analisar o espaço $r \times p_r$ ou $r \times \dot{r}$). Faça um esboço do espaço de fases (veja o formulário abaixo). Há a possibilidade de uma bifurcação, com respeito ao parâmetro ω, neste sistema ? Discuta.

(4.0 pontos, 1.0 para os pontos fixos, 1.0 para a classificação, 1.0 para o esboço, e 1.0 para a bifurcação)

Analisaremos o espaço $r \times p_r$. A partir de $\mathcal{H}$ temos:

$$\begin{cases} \dot{r} & = p_r/m(1+\cot^2\alpha) \\ \dot{p}_r & = mr\omega^2 - mg\cot\alpha = m\omega^2(r-r_0) \end{cases}$$

O ponto fixo (apenas 1), ocorre no ponto de equilíbrio calculado no item b (r_0, 0) (1.0 pontos). Este espaço é linear! A matriz A se escreve:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/m(1+\cot^2\alpha) \\ m\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

(perceba que está implicada uma transformação da variável $r' = r - r_0$, etc, etc). Ou autovalores são :

$$\lambda = \pm\omega^2/(1+\cot^2\alpha)$$

Com autovetores:

$$\vec{u}_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm(b/c)^{1/2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ou seja, o ponto é uma sela (1.0 pontos). Um esboço do espaço de fases mostra que todo o fluxo eventualmente se afasta do ponto fixo, a não ser que a condiçao inicial esteja ao longo de uma das autodireções (1.0 pontos). Nota-se que ao variar ω irá ocorrer apenas uma mudança na posição do ponto fixo. Portanto, não há bifurcação (1.0 pontos).

Notas: é importante perceber que os itens c e b precisam ser compatíveis. Um erro ao calcular as eqs. canônicas poderia levar o estudante a uma conclusão errada sobre o poto fixo. No entanto, este erro pode ser contrastado com o resultado do item b.

(d) *(Até 0.5 pontos extras):* mostre que a energia mecânica total deste sistema *não se conserva.*

A energia total se escreve ($E = T + U$):

$$E = \frac{p_r^2}{2m(1+\cot^2\alpha)} + mgr\cot\alpha$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{p_r}{m(1+\cot^2\alpha)}\dot{p}_r + mg\cot\alpha\dot{r}$$

Usando as equações canônicas:

$$= \frac{p_r}{m(1+\cot^2\alpha)}[mr\omega^2 - mg\cot\alpha] + mg\cot\alpha[\frac{p_r}{m(1+\cot^2\alpha)}] = \frac{p_r r\omega^2}{(1+\cot^2\alpha)} \neq 0$$

De maneira que a energia não se conserva, exceto se o sistema estiver no ponto fixo, ou seja, em movimento circular uniforme!

3 Pertubação quártica

A energia potencial de uma partícula de massa m se escreve:

$$U(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{4}\frac{\delta}{a^2}r^4$$

onde a é uma constante com unidade de comprimento, $k > 0$, $\delta > 0$ e o termo quártico é uma *pequena* correção ao termo harmônico ($\delta \ll k$).

(a) Para ordem zero em δ (ou seja, para $\delta = 0$), determine o momento angular L_z^2 desta particula para movimento circular de raio r_0 (*dica:* você pode usar o método de sua preferência, mas um potencial efetivo pode ser definido, com a devida justificativa, facilmente). Calcule também a frequência $\dot{\phi}_0$ de revolução.

(3.0 pontos, 1.0 pontos para o método, 1.0 pontos para r_0 e 1.0 pontos $\dot{\phi}_0$)

Seguimos a dica e notamos que podemos escrever (formulário):

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{4}\frac{\delta}{a^2}r^4$$

Como $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$ e $d\mathcal{H}/dt = \partial\mathcal{H}/\partial t$, $\mathcal{H}$ é constante (ver equações canônicas), portanto o método do potencial efetivo pode ser usado. Observamos que $\dot{p}_\phi = 0$, portanto p_ϕ é uma constante. Este momento generalizado deve ser identificado como a componente L_z do momento angular, ou seja, $p_\phi = L_z$ (0.5 pontos). Desta maneira, podemos definir o seguinte potencial efetivo:

$$V_{eff}(r) = \frac{L_z^2}{2mr^2} + U(r)$$

$$= \frac{L_z^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{4}\frac{\delta}{a^2}r^4$$

(1.0 pontos). Para encontrar o mínimo, avaliamos $V'_{eff}(r)$:

$$V'_{eff}(r) = \frac{-L_z^2}{mr^3} + kr + \frac{\delta}{a^2}r^3$$

Para $r = r_0$, esta expressão é igual a 0:

$$(\frac{-L_z^2}{mr^3} + kr + \frac{\delta}{a^2}r^3)_{r=r_0} = 0$$

Para $\delta = 0$, temos:

$$L_z^2 = mkr_0^4$$

(1.0 pontos). Para a frequência de revolução, temos:

$$\dot{\phi}_0 = L_z/mr_0^2 = \sqrt{k/m}$$

(1.0 pontos)

(b) Deduza uma expressão para a frequência ω_r^2 de pequenas vibrações em torno do raio de movimento circular r_0 (considere $\delta \neq 0$). Adote como aproximação o valor de L_z^2 encontrado no item (a) e escreva uma expressão para ω_r em até primeira ordem em δ (considere que a constante a é da ordem de r_0, mas que $\delta \ll k$).

(4.0 pontos)

Seguimos usando V_{eff}, de maneira que:

$$\omega_r^2 = \frac{1}{m}V''_{eff}(r_0)$$

Lembrando que $\delta \neq 0$, temos:

$$V''_{eff}(r) = \frac{3L_z^2}{mr^4} + k + \frac{3\delta}{a^2}r^2$$

Precisamos calcular o valor desta função para $r = r_0$ (2.0 pontos). Adotamos a aproximação referente a L_z^2. Desta maneira:

$$\omega_r^2 = \frac{1}{m}[\frac{3(mkr_0^4)}{mr_0^4} + k + \frac{3\delta}{a^2}r_0^2]$$

$$\omega_r^2 = \frac{1}{m}[4k + \frac{3\delta}{a^2}r_0^2]$$

(1.0 pontos). Considerando a da ordem de r_0 e $\delta \ll k$ (como está no enunciado), temos:

$$\omega_r^2 = \frac{4k}{m}[1 + \frac{3\delta r_0^2}{4ka^2}]$$

e finalmente:

$$\omega_r \approx 2\sqrt{\frac{k}{m}}[1 + \frac{3\delta r_0^2}{8ka^2}]$$

(1.0 pontos)

(c) Analise o comportamento da órbita na situação de pequenas oscilações e para $\delta \neq 0$ (é aberta ou fechada? qual o sentido de precessão?)

(3.0 pontos)

A análise é baseada na razão entre as frequências $\dot{\phi}_0$ e ω_r, que pode ser racional ou irracional, o que determina se a órbita é fechada ou aberta, respectivamente (1.0 pontos, note que as frequências devem ser corretamente interpretadas). Nesta direção, note que:

$$\frac{\omega_r}{\dot{\phi}_0} = 2[1 + \frac{3\delta r_0^2}{8ka^2}]$$

pode ser considerado um número racional, mas isto é uma aproximação. Em geral, este número não será racional e a órbita é aberta e será observada como uma órbita eliptica que precessa (1.0 pontos). A precessão é uma questão delicada. Note que para $\delta \neq 0$, a frequência ω_r aumenta com respeito ao caso $\delta = 0$. Vamos denominar este caso ω_r^0. Analogamente, $T_r^0 = 2\pi/\omega_r^0$. Desta maneira, $T_r < T_r^0$. Assim, os apsidais ocorrem um um tempo anterior, haverá um retrocesso e a precessão é no sentido horário (1.0 pontos). Para provar (não é necessário, quem o fez pode ter ganho pontos extras), considere: como para $\delta = 0$ o primeiro apsidal ocorre para $\phi = \pi$.

$$\dot{\phi}_0 T_r^0 = \pi$$

Mas temos que $T_r < T_r^0$. Desta maneira:

$$\dot{\phi}_0 T_r = \pi - \Delta\phi$$

(note que por esta definição, $\Delta\phi$ positivo é um retrocessso angular). Ou ainda:

$$\frac{\dot{\phi}_0}{\omega_r}2\pi = \pi - \Delta\phi$$

$$\frac{2\pi}{2[1 + \frac{3\delta r_0^2}{8ka^2}]} - \pi = -\Delta\phi$$

Dái:

$$\Delta\phi \approx \frac{3\pi\delta r_0^2}{8ka^2}$$

Portanto, temos um retrocesso angular e a precessão é no sentido horário. Pode-se também considerar $a/r_0 \approx 1$.

Formulário

A priori, você vai utilizar, ou pensar sobre, estas fórmulas para resolver os exercícios da prova.

Definição da Lagrangiana

$$\mathcal{L} = T - U$$

Eqs. de movimento de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Eqs. de movimento de Lagrange (na presença de vínculos)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_j} & = 0 \\ g_k(q_j) & = 0 \end{cases}$$

Forças de vínculo generalizadas:

$$Q_k = \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_j}$$

Momentos generalizados:

$$p_{q_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

Hamiltoniana (deve ser função de q_j e p_{q_j}):

$$\mathcal{H} = \sum_j \dot{q}_j p_{q_j} - L$$

Eqs. canônicas do movimento:

$$\begin{cases} \dot{q}_j & = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \\ \dot{p}_{q_j} & = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \\ \frac{d\mathcal{H}}{dt} & = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \end{cases}$$

Autovalores e autovetores da matriz 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_\pm & = \pm\sqrt{bc} \\ \vec{u}_\pm & = \begin{pmatrix} \pm(b/c)^{1/2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Aproximações importantes ($x \ll 1$):

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

Hamiltoniana para forças centrais (para 2 corpos, basta substituir m por μ):

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + U(r)$$