

Mec_2Sem2015 - Teste #1

Nome: _____ NUSP: _____

Você tem até 30 ± 5 minutos para fazer este teste. Resolva o exercício de maneira organizada (escreva definições que considerar importantes e justifique seus cálculos). Bom trabalho.

1 Trajetórias no sistema cartesiano I

Considere o seguinte vetor posição de uma partícula de massa m no sistema cartesiano:

$$\vec{r}(t) = 2b \sin \omega t \hat{i} + b \cos \omega t \hat{j}$$

(a) Faça um esboço da trajetória associada a $\vec{r}(t)$ para t no intervalo $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$. Não deixe de anotar no seu esboço os parâmetros $2b$ e b .

(2.0 pontos)

O esboço deve conter uma trajetória fechada, de aparência elíptica (1.0 pontos), onde se mostra corretamente o b ao longo de y e $2b$ ao longo de x (1.0 pontos).

(b) Determine os vetores $\vec{v}$ e $\vec{a}$. Mostre que $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$. No contexto deste resultado, discuta o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{r}$ ao longo da trajetória.

(2.0 pontos)

Cálculo dos vetores (1.0 pontos): o vetor velocidade se escreve $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ (0.1 pontos), e calculamos:

$$\vec{v}(t) = 2b\omega \cos \omega t \hat{i} - b\omega \sin \omega t \hat{j}$$

(0.4 pontos). Já o vetor aceleração $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$ (0.1 pontos). E calculamos:

$$\vec{a}(t) = -2b\omega^2 \sin \omega t \hat{i} - b\omega^2 \cos \omega t \hat{j}$$

(0.4 pontos).

Notamos que: $\vec{a} = -\omega^2[2b \sin \omega t \hat{i} + b \cos \omega t \hat{j}] = -\omega^2 \vec{r}(t)$ (0.25 pontos), portanto $\vec{a}$ é antiparalelo a $\vec{r}$ ao longo de toda trajetória (0.5 pontos), decorre que o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{r}$ é π (0.25 pontos).

(c) Determine explicitamente os instantes de tempo, no intervalo $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$, nos quais $\vec{v}$ e $\vec{a}$ são perpendiculares.

(3.0 pontos)

Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{a}$ são perpendiculares quando $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ (1.0 pontos). Trabalhando o produto escalar temos:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = (2b\omega)(-2b\omega^2) \cos \omega t \sin \omega t + (-b\omega)(-b\omega^2) \sin \omega t \cos \omega t$$

$$= -3b^2\omega^3 \cos \omega t \sin \omega t$$

(0.5 pontos, -0.25 pontos para erros de conta). Analisando a parte dependente do tempo, vemos que o produto escalar é 0 nos instantes: $\omega t = 0, = \pi/2, = \pi, = 3\pi/2$ e $= 2\pi$ (1.5 pontos, não limitou n par ao intervalo pedido -0.25 pontos).

(d) Ilustre os vetores $\vec{r}$, $\vec{v}$ e $\vec{a}$ nos instantes de tempo encontrados no item (c). Discuta a direção do vetor $\vec{r} \times m\vec{v}$ ao longo da trajetória.

(3.0 pontos)

Representa-se os vetores $\vec{r}$, $\vec{v}$ e $\vec{a}$ nos quatro pontos nos eixos (1.0 pontos, -0.25 se não ilustrou para todos os pontos), com $\vec{r}$ sempre apontado da origem para a partícula (0.5 pontos), $\vec{a}$ sempre apontando da partícula para a origem (0.5 pontos) e $\vec{v}$, a partir da partícula, indicando que a partícula se movimenta no sentido horário (0.5 pontos). Pela representação dos vetores e a regra da mão direita, percebe-se que $\vec{r} \times m\vec{v}$ está na direção $-\hat{k}$ (0.5 pontos).