

Mec 2Sem2015 - Teste #2

Nome: _____ NUSP: _____

Você tem até 30 ± 5 minutos para fazer este teste. Resolva o exercício de maneira organizada (escreva definições que considerar importantes e justifique seus cálculos). Bom trabalho.

1 Potencial 1D

Considere uma partícula de massa m movendo-se em uma região $x > 0$ cuja energia potencial se escreve:

$$U(x) = U_0 \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right)$$

onde U_0 e a são constantes positivas.

(a) Faça um esboço de $U(x)$.

(2.0 pontos)

Elementos que devem ser avaliados no gráfico e que devem constar para a pontuação referente ao item (a) : contribuição individual de cada termo ou uma justificativa razoável dos limites para x grande e x pequeno (0.5 pontos), presença de um ponto de mínimo (0.5 pontos), uma reta para x grande (0.5 pontos), uma função que vai para infinito em x pequeno (0.5 pontos).

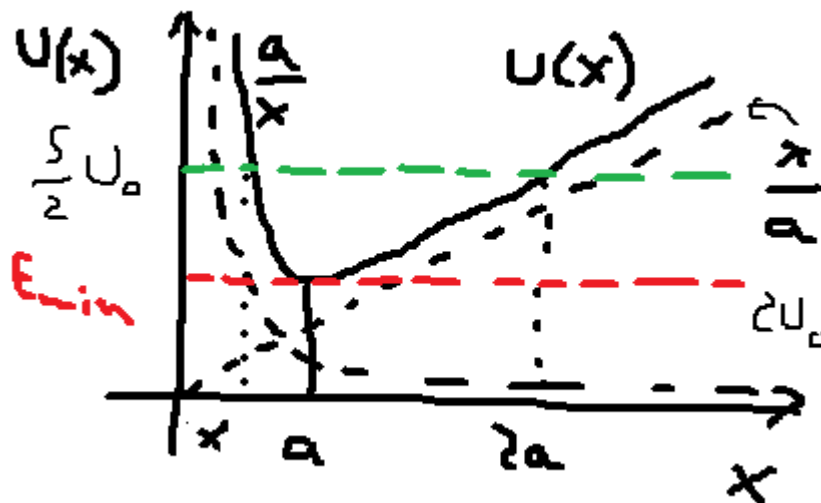


Figura 1: Esboço de $U(x)$ contendo elementos dos itens (a), (b) e (c).

(b) Encontre os pontos de equilíbrio do potencial e, com base no esboço, discuta se estes pontos são estáveis ou instáveis. Indique seu resultado no esboço para $U(x)$. Calcule ainda a energia mecânica total da partícula para condições iniciais $x(0) = x_{eq}$ (todos os pontos encontrados) e $\dot{x}(0) = 0$. Igualmente, indique este resultado no gráfico.

(3.0 pontos, 2.0 para o ponto e sua classificação, 0.5 para a energia total, 0.5 para anotar corretamente no gráfico)

Os pontos de equilíbrio ocorrem para

$$\frac{dU(x)}{dx} \Big|_{x=x_{eq}} = 0$$

(0.5 pontos). Calculando a derivada, temos:

$$= -\frac{a}{x_{eq}^2} + \frac{1}{a} = 0$$

$$x_{eq} = a$$

Pois a partícula está apenas na região $x > 0$ (0.75 pontos, -0.25 se também adota a raiz negativa, -0.25 se errar a conta da derivada). Com base no esboço, vemos que este ponto corresponde a um mínimo de $U(x)$, logo o ponto é de equilíbrio estável (0.75 pontos). A energia mecânica total se escreve:

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = U(x_{eq})$$

pois $\dot{x} = 0$, daí temos $E = 2U_0$ (0.5 pontos, tem que argumentar que a cinética é 0, caso contrário -0.25 pontos). Que está anotado no gráfico como a linha vermelha no esboço (0.5 pontos, tem que mostrar o $2U_0$ no esboço, caso contrário, -0.5 pontos).

(c) Em $t = 0$, a partícula tem condições iniciais $\dot{x}(0) = 0$ e $x(0) = 2a$. Determine a energia da partícula *para toda a dinâmica*. Indique este valor de energia no esboço para $U(x)$. Discuta a dinâmica da partícula em linhas gerais (considere escrever entre 2 e 4 linhas).

(2.5 pontos, 1.0 pontos para a energia e representação no gráfico, até 1.5 pontos para a discussão)

Neste caso, $T = 0$ e a energia total é $E = U[x(0)] = U_0(5/2)$ (0.5 pontos), esta é a energia total para toda a dinâmica pois o sistema é conservativo (-0.25 se não comentar explicitamente). Esta energia é anotada no esboço pela linha verde, mostrando o $E = 5/2U_0$ (0.5 pontos, -0.5 se não anotou o valor da energia no esboço). Discussão (até 1.5 pontos para a discussão)

Exemplos:

(i) A partícula está confinada entre $x_{max} = 2a$ e um x_{min} indicado no gráfico (0.75 pontos, não precisa calcular x_{min} , -0.25 se escrever que o movimento é harmônico, se calcular x_{min} vale 1.0 pontos); (ii) a dinâmica da partícula é periódica (0.5 pontos); (iii) O máximo de energia cinética ocorre quando a partícula está em $x = x_{eq}$ (0.75 pontos), etc.

(d) Caso os pontos sejam estáveis, calcule a frequência de pequenas oscilações em torno destes pontos.

(2.5 pontos, 1.0 pontos para a discussão e 1.5 pontos para o resultado)

O ponto de equilíbrio, $x = x_{eq}$, é estável e admite pequenas oscilações (0.5 pontos). Calculamos o valor da segunda derivada da energia potencial neste ponto, que funciona como um “ k ” da mola (0.5 pontos)

$$\begin{aligned} k &= \left. \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right|_{x=x_{eq}} \\ &= U_0 \left[\frac{2a}{x^3} \right]_{x=x_{eq}} = \frac{2U_0}{a^2} \end{aligned}$$

Desta maneira, a frequência de vibração se escreve:

$$\omega_0^2 = k/m = \frac{2U_0}{ma^2}$$

(1.5 pontos, erros: álgebra -0.5 pontos, sinal negativo sem comentar -0.5 pontos - acumulativo com a álgebra, esqueceu de dividir pela massa -0.5 pontos)

Potencial 1D