Mec_2Sem2015 - Teste #3

Nome:____NUSP:___________

Você tem até 30 ± 5 minutos para fazer este teste. Resolva o exercício de maneira organizada (escreva definições que considerar importantes e justifique seus cálculos). Bom trabalho.

1 Equação da trajetória

A equação da trajetória para a coordenada relativa r de um sistema de duas partículas interagindo por meio de uma força central se escreve:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = -u - \frac{\mu}{L_z^2 u^2} f(1/u)$$

onde μ é a massa reduzida, $L_z = \mu r^2 \dot{\phi}$ é uma constante do movimento e $u(\phi) = 1/r(\phi)$.

(a) Determine $f(r)$ associada à trajetória $r(\phi) = A\phi^2$.

(4.0 pontos, 1.0 pontos para definição de $u(\phi)$ e sua derivada, 1.0 para a correta substituição na equação e 2.0 pontos para a resposta final)

$u(\phi) = 1/(A\phi^2)$, de maneira que: $u''(\phi) = 6/(A\phi^4) = 6Au^2$. Substituindo na equação temos:

$$6Au^2 = -u - \frac{\mu}{L_z^2 u^2} f(1/u)$$

Resolvendo para $f(1/u)$, temos:

$$-6Au^4 = u^3 + \frac{\mu}{L_z^2} f(1/u)$$

$$f(1/u) = \frac{L_z^2}{\mu}(-6Au^4 - u^3)$$

Ou, em termo de $f(r)$:

$$f(r) = \frac{L_z^2}{\mu}(-\frac{6A}{r^4} - \frac{1}{r^3})$$

(apenas erros do desenvolvimento da álgebra e das derivadas: -1.0 pontos. Erros de aplicação conceitual da fórmula: -3.0 pontos)

(b) Determine a energia potencial $U(r)$ e a energia potencial efetiva $V_{eff}(r)$ associadas a esta força.

(3.0 pontos, 2.0 pontos para $U(r)$ e 1.0 pontos para $V_{eff}(r)$)

A energia potencial se obtém pela integral:

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} f(r')dr' = \frac{L_z^2}{\mu}(-\frac{6A}{3r^3} - \frac{1}{2r^2})$$

(esqueceu o sinal da definição: -1.0 pontos; erros do desenvolvimento da álgebra e das integrais: -0.5 pontos)

Já o potencial efetivo se escreve:

$$V_{eff}(r) = \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + U(r) = \frac{-2AL_z^2}{\mu r^3}$$

(-0.5 pontos se não chegou a resposta final mas aplicou corretamente a definição.)

(c) Órbitas circulares são possíveis? Justifique (dica: use um esboço de $V_{eff}(r)$ ou proceda algebricamente com a derivada).

(2.0 pontos, 1.0 para a afirmação e 2.0 para a justificativa)

Não são possíveis. Um esboço de $V_{eff}(r)$ não mostra pontos de mínimo ou máximo. Alternativamente, a derivada de $V_{eff}(r)$ só é 0 para $r \to \infty$, portanto não há órbita circular. (a afirmação deve ser coerente com o resultado o item b. Assim como a justificativa.)

(d) Para que valores de energia você observa a órbita $r(\phi) = A\phi^2$? Justifique.

(1.0 pontos, serão pontuadas justificativas coerentes). O correto é $E = 0$, mas o problema é mais difícil do que planejei:

Note que $\dot{r} = 2A\phi\dot{\phi} = 2A\phi L_z/\mu r^2$, dái, escrevemos para o termo cinético:

$$T = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 = \frac{\mu}{2}(\frac{4A^2\phi^2 L_z^2}{\mu^2 r^4}) = \frac{\mu}{2}(\frac{4AL_z^2}{\mu^2 r^3}) = (\frac{2AL_z^2}{\mu r^3})$$

Somando aos demais termos para achar a energia total, temos:

$$E = (\frac{2AL_z^2}{\mu r^3}) - \frac{2AL_z^2}{\mu r^3} = 0$$

Dados:

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^m}) = \frac{-m}{x^{m+1}}$$

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} f(r)dr$$

onde r_0 é o ponto no qual $U(r_0) = 0$.

$$V_{eff}(r) = \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

Equação da trajetória