Mec_2Sem2015 - Teste #4

Nome:____NUSP:___________

Você tem até 30 ± 5 minutos para fazer este teste. Resolva o exercício de maneira organizada (escreva definições que considerar importantes e justifique seus cálculos). Bom trabalho.

1 Vínculos em um potencial harmônico

Uma partícula de massa m move-se em um hemisfério de raio a e está sujeita *exclusivamente* a uma energia potencial harmônica $U(r) = (1/2)kr^2$.

(a) Escreva a lagrangiana e a equação de vínculo para este problema.

(2.5 pontos)

Diretamente da definição, temos:

$$\mathcal{L} = T - U$$

Como sugerido, adotamos coordenadas polares como coordenadas generalizadas, daí:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}kr^2$$

(1.5 pontos). O vínculo para o problema se escreve:

$$g(r) = r - a = 0$$

(1.0 pontos).

(b) Escreva as equações de movimento de Lagrange (não esqueça dos vínculos).

(2.5 pontos)

Temos um vínculo ($g(r) = r - a = 0$) no problema e duas coordenadas generalizadas (r e ϕ). Desta maneira:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial r} & = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \phi} & = 0 \end{cases}$$

(0.5 pontos) Notamos que:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r} & = 1 \\ \frac{\partial g}{\partial \phi} & = 0 \end{cases}$$

(0.5 pontos). E os demais cálculos resultam em

$$\begin{cases} mr\dot{\phi}^2 - kr - m\ddot{r} + \lambda & = 0 \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) & = 0 \\ r - a & a \end{cases}$$

(1.5 pontos, -1.0 pontos para erros de álgebra)

(c) Determine o multiplicador de Lagrange λ.

(2.5 pontos)

Para esta etapa, implementamos que $r = a$, daí:

$$ma\dot{\phi}^2 - ka + \lambda = 0$$

(1.0 pontos). Portanto:

$$\lambda = -ma\dot{\phi}^2 + ka$$

(1.5 pontos, -1.0 se $r \neq a$, pode ser outra constante).

(d) Determine as forças de vínculo e a velocidade angular $\dot{\phi}_C$ crítica para a qual a partícula escapa do hemisfério de raio a.

Existem apenas a força de vínculo Q_r pois $\partial g/\partial\phi = 0$, desta maneira:

$$Q_r = \frac{\partial g}{\partial r}\lambda = -ma\dot{\phi}^2 + ka$$

(1.0 pontos). A condição que leva a partícula a escapar é:

$$Q_r = 0$$

(1.0 pontos). Desta maneira:

$$\dot{\phi}_C = \sqrt{k/m}$$

(0.5 pontos, -0.5 qualquer outra resposta.)
Sugestão: em problemas de forças centrais é suficiente usar coordenadas polares.
Dados:
Em coordenadas polares (r, ϕ):

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

Definição da lagrangiana:

$$\mathcal{L} = T - U$$

Equações de movimento de Lagrange com vínculos:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_j} & = 0 \\ g_k(q_j) & = 0 \end{cases}$$

Forças de vínculo generalizadas:

$$Q_k = \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_j}$$

Vínculos em um potencial harmônico