Mec_1Sem2019 - Prova #1

Nome:____NUSP:___________

Você tem até 120 minutos para fazer esta prova. Resolva os exercícios de maneira organizada. A prova contém 8 itens e cada item vale 10/8 pontos. Respostas particularmente bem escritas poderão receber pontos extras.

Dica geral I: caso você não consiga deduzir um resultado de um item anterior que deve ser usado em um item posterior, escreva explicitamente no item em consideração o que está faltando e indique como você resolveria o problema.

Dica geral II: muito cuidado com comentários qualitativos. Seja objetiv@ e rigoros@ com os conceitos.

1 Dinâmica de um partícula 1D

Considere uma partícula de massa m, restrita a mover-se em uma única dimensão, sujeita à uma força restauradora do tipo $F = -k(x - x_{eq})\hat{\boldsymbol{x}}$ e à uma força força de amortecimento proporcional à velocidade da partícula (-$b\dot{x}$, $b > 0$).

(a) Escreva a equação do movimento (segunda lei de Newton) para descrever a dinâmica desta partícula e ainda a solução geral do problema.

(b) Para condições iniciais $x_0 = x_{eq}$ e velocidade $\boldsymbol{v}_0 = v_{x0}\hat{\boldsymbol{x}}$ onde $v_{x0} > 0$, determine a função $x(t)$ para a partícula. Faça um esboço de $x(t)$ ($0 < t < \infty$) relacionando a figura à parâmetros da solução.

(c) Determine o trabalho total realizado sob a partícula (durante o intervalo de tempo $0 < t \to \infty$) e ainda o trabalho realizado por cada força que age sobre a partícula.

Dinâmica de um partícula 1D

2 Partículas interagentes

Duas partículas, de massa $m_1 = 2m_2 = m$, interagem por meio de uma força que contém dois termos. Um dos termos é chamado termo repulsivo, e se escreve:

$$\vec{F}^R_{1(2)} = \frac{U_0/6}{||\vec{x}_1 - \vec{x}_2||^7}\hat{x}_{12} = \frac{U_0/6}{||\vec{x}||^7}\hat{x} = \frac{U_0}{6x^7}\hat{x}$$

onde $U_0 > 0$ é uma constante e $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ é o vetor posição relativa 1D (note que $||\vec{x}|| = x > 0$) e $\hat{x} = \vec{x}/x$. O outro termo é o chamado termo atrativo e sua expressão escreve-se:

$$\vec{F}^A_{1(2)} = -k(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = -k\vec{x} = -kx\hat{x}$$

onde $k > 0$ é uma constante. O sistema é estritamente 1D.

(a) Determine a distância de equilíbrio x_{eq} entre as duas partículas.

(b) Deduza uma expressão para $U(x)$ de maneira a escrever a energia total do sistema na forma:

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{x}^2 + U(x)$$

e determine a frequência de pequenas oscilações das partículas em torno da distância de equilíbrio (ou mostre que o ponto de equilíbrio deste sistema é instável).

(c) Em $t = 0$ as partículas encontram-se em repouso e à uma distância d, tal que $d \lessapprox x_{eq}$. Para estas condições iniciais, determine expressões aproximadas para $\vec{x}(t)$, $\vec{x}_1(t)$ e $\vec{x}_2(t)$ medidos a partir do CM. Para um instante logo após $t = 0$, faça um esquema incluindo as duas partículas, a posição do CM e os vetores posição e velocidade de cada uma das partículas.

Partículas interagentes

3 Nave espacial

Uma enorme nave espacial, em forma aproximada de um cilindro reto de raio R_0 e comprimento L, viaja em velocidade constante pelo espaço profundo, suficientemente afastada de outros corpos. Um mecanismo interno mantém a nave girando ao redor de seu eixo geométrico central com velocidade angular $\vec{\omega}$ constante ($\vec{\omega} = \omega_0 \hat{k}$). Dois cientistas, A e B, estão no interior da nave em pé sob a casca cilíndrica, ambos em repouso em relação ao chão. Os cientistas estão distantes l metros (l é constante).

(a) O referencial da cientista A é inercial ? Se sim, explique porque. Caso contrário, determine a aceleração do referencial da cientista A. Neste caso, use explicitamente a notação vetorial.

(b) O cientista B lança um objeto de massa m_0 na direção de A. Determine as *equações do movimento* que devem ser escritas *pela cientista* A para o estudo da dinâmica do objeto após o mesmo ter sido lançado. Deixe explícito forças reais e forças de inércia na expressão. Discuta brevemente, a nível qualitativo, o efeito de cada um dos termos da equação do movimento sobre a dinâmica do objeto.
(dados: $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, e os demais por permutação ou $\hat{r} \times \hat{\phi} = \hat{k}$, e os demais por permutação).

Nave espacial

Formulário

A priori, você vai utilizar, ou pensar sobre, estas fórmulas para resolver os exercícios da prova.

Segunda lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Derivada útil:

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^n}) = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

Pequenas vibrações:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\mu}\frac{d^2U(x)}{dx^2}|_{x=x_{eq}}$$

Teorema de Coriolis

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} - m[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \ddot{\vec{R}}]$$

onde $m\vec{a}$ é a força efetiva, medida em um *referencial não inercial*, $\sum \vec{F}$ é a soma das forças que atuam sobre o corpo de massa m ($= m\vec{a}'$, onde $\vec{a}'$ é medido em um *referencial inercial*), $\vec{r}$ e $\vec{v}$ são quantidades cinemáticas da partícula medidas no *referencial não inercial*, e $\vec{\omega}$ e $\ddot{\vec{R}}_f$ são a velocidade angular e a aceleração do referencial acelerado, respectivamente. O termo:

$$\vec{F}_{\text{inércia}} = -m[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \ddot{\vec{R}}]$$

recebe o nome de forças de inércia.