Mec_1Sem2019 - Prova #1 - Solução&Critérios

Nome:____NUSP:____________

Você tem até 120 minutos para fazer esta prova. Resolva os exercícios de maneira organizada. A prova contém 8 itens e cada item vale 10/8 pontos. Respostas particularmente bem escritas poderão receber pontos extras.

Dica geral I: caso você não consiga deduzir um resultado de um item anterior que deve ser usado em um item posterior, escreva explicitamente no item em consideração o que está faltando e indique como você resolveria o problema.

Dica geral II: muito cuidado com comentários qualitativos. Seja objetiv@ e rigoros@ com os conceitos.

Algumas observações: de um ponto de vista técnico, a prova exigiu apenas a solução de uma equação diferencial linear, a integração e derivação de polinômios e ainda operações vetoriais. Todas são ferramentas que podem ser reduzidas à um curso de cálculo I e de geometria analítica. Nota-se, portanto, que a dificuldade da prova está centrada na Física, e não em métodos matemáticos. Uma segunda observação diz respeito à este gabarito: aqui exponho o conteúdo mínimo que a resposta deve conter para ter nota máxima. A ausência de uma ou outra informação leva certamente à diminuição da nota no item.

1 Dinâmica de um partícula 1D

Considere uma partícula de massa m, restrita a mover-se em uma única dimensão, sujeita à uma força restauradora do tipo $F = -k(x - x_{eq})\hat{\boldsymbol{x}}$ e à uma força força de amortecimento proporcional à velocidade da partícula (-$b\dot{x}$, $b > 0$).

(a) Escreva a equação do movimento (segunda lei de Newton) para descrever a dinâmica desta partícula e ainda a solução geral do problema.

Solução: Da segunda lei de Newton, temos: $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Adotamos coordenanadas cartesianas, de modo que $\boldsymbol{a} = \ddot{x}\hat{\boldsymbol{x}}$ e escrevemos:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_{eq}) - b\dot{x}$$

(0.4 pontos). Com a mudança de variáveis $u = x - x_{eq}$, temos:

$$m\ddot{u} = -ku - b\dot{u}$$

(0.2 pontos, ou algum argumento sobre a translação da origem do sistema de coordenadas). Para amortecimento fraco, este é o problema do oscilador harmônico amortecido (ou pode-se analisar casos separados, com pontos extras). De fato:

$$u(t) = x(t) - x_{eq} = A\exp(-\beta t)\cos(\omega_\beta t + \phi)$$

onde $\beta = b/2m$ e $\omega_\beta^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. (0.4 pontos)

(b) Para condições iniciais $x_0 = x_{eq}$ e velocidade $\boldsymbol{v}_0 = v_{x0}\hat{\boldsymbol{x}}$ onde $v_{x0} > 0$, determine a função $x(t)$ para a partícula. Faça um esboço de $x(t)$ $(0 < t < \infty)$ relacionando a figura à parâmetros da solução.

Solução: Em $t = 0$, $x(0) = x_{eq}$ mas também $x(0) - x_{eq} = A\cos(\phi)$ a partir da solução geral. Chegamos então que: $\phi = \pi/2$ e ficamos com:

$$x(t) - x_{eq} = A\exp(-\beta t)\sin(\omega_\beta t)$$

(0.3 pontos) Agora:

$$\dot{x} = -\beta A \exp(-\beta t)\sin(\omega_\beta t) + \omega_\beta A \exp(-\beta t)\cos(\omega_\beta t)$$

mas $\dot{x} = v_{0x}$ e temos:

$$v_{0x} = \omega_\beta A$$

assim:

$$x(t) - x_{eq} = \frac{v_{0x}}{\omega_\beta}\exp(-\beta t)\sin(\omega_\beta t)$$

(0.3 pontos) O esboço deve conter: i) partida de $x = x_{eq}$ com velocidade $v_{x0} > 0$ ii) um padrão de decaimento de uma oscilação iii) em torno da reta $x = x_{eq}$. (0.4 pontos)

(c) Determine o trabalho total realizado sob a partícula (durante o intervalo de tempo $0 < t < \infty$) e ainda o trabalho realizado por cada força que age sobre a partícula.

Solução: O trabalho pode ser obtido pelo teorema trabalho energia cinética:

$$W = \Delta K = K_f - K_i$$

a partir de b sabemos que para $t \to \infty$, $x(t) = x_{eq}$ com velocidade nula, assim $K_f = 0$ e temos:

$$W = -\frac{mv_{0x}^2}{2}$$

(0.3 pontos) Este é o trabalho da força resultante, que escreve-se:

$$F = -k(x - x_{eq}) - b\dot{x}$$

Vamos calcular cada um destes termos:

$$\int_0^\infty F\dot{x}dt = \int_0^\infty (-k(x - x_{eq}) - b\dot{x})\dot{x}dt$$

$$= -\int_0^\infty \frac{k}{2}(\frac{d}{dt}(x - x_{eq})^2)dt - \int_0^\infty b\dot{x}^2 dt$$

para qualquer conjunto de parâmetros, teremos que $x(0) = x(\infty) = x_{eq}$ e assim:

$$-\int_0^\infty \frac{k}{2}(\frac{d}{dt}(x - x_{eq})^2)dt = 0$$

(0.4 pontos, note que ao longo da dinâmica este trabalho pode ser $\neq 0$) Portanto, sobra apenas o trabalho devido o termo:

$$-\int_0^\infty b\dot{x}^2 dt$$

mas, pelo teorema trabalho-energia cinética, temos:

$$-\int_0^\infty b\dot{x}^2 dt = -\frac{mv_{0x}^2}{2}$$

e a força $-b\dot{x}$ realiza um trabalho de $-\frac{mv_{0x}^2}{2}$. (0.3 pontos)

2 Partículas interagentes

Duas partículas, de massa $m_1 = 2m_2 = m$, interagem por meio de uma força que contém dois termos. Um dos termos é chamado termo repulsivo, e se escreve:

$$\vec{F}^R_{1(2)} = \frac{U_0/6}{||\vec{x}_1 - \vec{x}_2||^7}\hat{x}_{12} = \frac{U_0/6}{||\vec{x}||^7}\hat{x} = \frac{U_0/6}{x^7}\hat{x}$$

onde $U_0 > 0$ é uma constante e $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ é o vetor posição relativa 1D (note que $||\vec{x}|| = x > 0$) e $\hat{x} = \vec{x}/x$. O outro termo é o chamado termo atrativo e sua expressão escreve-se:

$$\vec{F}^A_{1(2)} = -k(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = -k\vec{x} = -kx\hat{x}$$

onde $k > 0$ é uma constante. O sistema é estritamente 1D.

(a) Determine a distância de equilíbrio x_{eq} entre as duas partículas.

Solução: A força que age, digamos, sobre a partícula 1 escreve-se:

$$\vec{F}_{1(2)}(x) = \frac{U_0/6}{x^7}\hat{x} - kx\hat{x}$$

Esta particula está em equilíbrio quando $\sum \vec{F}_{1(2)}(x) = 0$ o que, pela terceira lei de Newton, também garante que a outra partícula estrá em equilíbrio (0.5 pontos). Desta maneira:

$$[\frac{U_0/6}{x^7}\hat{x} - kx\hat{x}]|_{x_{eq}} = 0$$

$$x^8_{eq} = \frac{U_0}{6k}$$

(0.5 pontos).

(b) Deduza uma expressão para $U(x)$ de maneira a escrever a energia total do sistema na forma:

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{x}^2 + U(x)$$

E determine a frequência de pequenas oscilações das partículas em torno da distância de equilíbrio (ou mostre que o ponto de equilíbrio deste sistema é instável).

Solução: Usamos a definição para $U(x) \equiv -\int F(x)dx + C$, a integração nos mostra que:

$$U(x) = \frac{U_0}{36x^6} + \frac{1}{2}kx^2 + C$$

onde C pode ser determinada a posteriori (0.3 pontos). A frequência de pequenas oscilações é calculada como:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\mu}\frac{d^2U(x)}{dx^2}|_{x=x_{eq}}$$

(0.2 pontos). A derivada segunda de $U(x)$ se escreve:

$$U''(x) = \frac{7U_0}{6x^8} + k$$

Calculamos agora: $U''(x_{eq})$

$$\frac{7U_0}{6\frac{U_0}{6k}} + k = 7k + k = 8k$$

Portanto (usando $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2) = (m^2/2)/(3m/2) = m/3$):

$$\omega_0^2 = \frac{3}{m}(8k)$$

como a solução para ω_0 é real (ou como $k_{eff} > 0$, etc), também mostramos que o ponto de equilíbrio é estável. (0.5 pontos)

(c) Em $t = 0$ as partículas encontram-se em repouso e à uma distância d, tal que $d \lessapprox x_{eq}$. Para estas condições iniciais, determine expressões aproximadas para $\vec{x}(t)$, $\vec{x}_1(t)$ e $\vec{x}_2(t)$ medidos a partir do CM. Para um instante logo após $t = 0$, faça um esquema incluindo as duas partículas, a posição do CM e os vetores posição e velocidade de cada uma das partículas.

Solução:

Nestas condições, a energia do sistema é um pouco maior que a energia de equilíbrio e estamos na situação de pequenas oscilações. A equação do movimento para distância (1D) entre as duas massas escreve-se:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{\mu}(x - x_{eq})$$

Desta maneira a solução geral para o vetor distância relativa escreve-se:

$$\boldsymbol{x}(t) = (x(t) - x_{eq})\hat{\boldsymbol{x}} = A\cos(\omega_0 t + \phi)\hat{\boldsymbol{x}}$$

(0.2 pontos). As condições iniciais são tais que $x(0) = d$ e $\dot{x}(0) = 0$. Assim, ficamos com:

$$d - x_{eq} = A\cos\phi$$

$$0 = \omega_0 \sin\phi$$

desta maneira temos: $\phi = 0$ e $A = d - x_{eq}$. Assim: $\boldsymbol{x}(t) = [(d - x_{eq})\cos(\omega_0 t) + x_{eq}]\hat{\boldsymbol{x}}$ (0.2 pontos) Para cada partícula, temos:

$$\boldsymbol{x}_{CM} = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1 + m_2}$$

mas, quando medimos a partír do CM: $\boldsymbol{x}_{CM} = 0$ e temos:

$$m_1\boldsymbol{x}_1 = -m_2\boldsymbol{x}_2$$

ou ainda:

$$m\boldsymbol{x}_1 = -\frac{m}{2}\boldsymbol{x}_2$$

usando que:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x_2}$$

resolvemos o sistema para encontrar cada um dos deslocamentos:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 & = \frac{1}{3}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_2 & = -\frac{2}{3}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

(0.3 pontos)

O esboço deve mostrar: i) velocidades que se afastam do centro de massa e ii) o centro de massa mais próximo da massa 1. (0.3 pontos)

3 Nave espacial

Uma enorme nave espacial, em forma aproximada de um cilindro reto de raio R_0 e comprimento L, viaja em velocidade constante pelo espaço profundo, suficientemente afastada de outros corpos. Um mecanismo interno mantém a nave girando ao redor de seu eixo geométrico central com velocidade angular $\vec{\omega}$ constante ($\vec{\omega} = \omega_0 \hat{k}$). Dois cientistas, A e B, estão no interior da nave em pé sob a casca cilíndrica, ambos em repouso em relação ao chão. Os cientistas estão distantes l metros (l é constante).

(a) O referencial da cientista A é inercial ? Se sim, explique porque. Caso contrário, determine a aceleração do referencial da cientista A. Neste caso, use explicitamente a notação vetorial.

Solução:
Não, o referencial de A é não inercial uma vez que A está em *movimento circular uniforme, de raio* R_0, devido a rotação do cilindro (0.5 pontos). Sua aceleração é dada por $\vec{a} = -R_0\omega_0^2\hat{r}$ onde um sistema de coordenadas está definido com origem em um ponto no eixo do cilindro (0.5 pontos).

(b) O cientista B lança um objeto de massa m_0 na direção de A. Determine as equações do movimento que devem ser escritas pela cientista A para o estudo da dinâmica do objeto após o mesmo ter sido lançado. Deixe explícito forças reais e forças de inércia na expressão. Discuta brevemente, a nível qualitativo, o efeito de cada um dos termos da equação do movimento sobre a dinâmica do objeto.

Solução:
A cientista A deve incorporar os efeito de sua aceleração na equações da dinâmica. Em geral, temos:

$$m_0\vec{a} = \sum \vec{F} - m_0[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \ddot{\vec{R}}_f]$$

Uma vez que a nave encontra-se no espaço profundo, inferimos que não há forças reais, portanto: $\sum \vec{F} = 0$ (0.2 pontos). Notemos que $\dot{\vec{\omega}} = 0$, e que $\vec{\omega} = \omega_0\hat{k}$, (perceba que este $\vec{\omega}$ coincide com o $\vec{\omega}$ da nave (!), mas é devido o movimento circular uniforme de A). Adotamos um sistema de coordenadas cilindricos com origem em um ponto no eixo do cilindr . Escolhemos como $\hat{k}$ o eixo do cilindro.

$$m_0\vec{a} = -m_0[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \ddot{\vec{R}}_f]$$

(0.3 pontos, observo que um sistema cartesiano com origem em A seria de fato a melhor escolha, caso o problema fosse quantitativo).

Em geral, apenas o termos de Coriolis e o termo centrífugo $\ddot{\vec{R}}_f = -R_0\omega_0^2\hat{r}$ são relevantes. O termo de Coriolis $(2\omega_0(\dot{r}\hat{\phi} - r\dot{\phi}\hat{r}))$ será responsável por uma deflexão laterial da trajetória (0.2 pontos), enquanto que o termo centrífugo $(\omega_0^2(r + R)\hat{r})$, age como uma força peso sobre a particula, acelerando à mesma na direção da casca cilíndrica (0.3 pontos).

Formulário

A priori, você vai utilizar, ou pensar sobre, estas fórmulas para resolver os exercícios da prova.

Segunda lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Derivada útil:

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^n}) = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

Pequenas vibrações:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\mu}\frac{d^2U(x)}{dx^2}|_{x=x_{eq}}$$

Teorema de Coriolis

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} - m[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \ddot{\vec{R}}]$$

onde $m\vec{a}$ é a força efetiva, medida em um *referencial não inercial*, $\sum \vec{F}$ é a soma das forças que atuam sobre o corpo de massa m ($= m\vec{a}'$, onde $\vec{a}'$ é medido em um *referencial inercial*), $\vec{r}$ e $\vec{v}$ são quantidades cinemáticas da partícula medidas no *referencial não inercial*, e $\vec{\omega}$ e $\ddot{\vec{R}}_f$ são a velocidade angular e a aceleração do referencial acelerado, respectivamente. O termo:

$$\vec{F}_{\text{inércia}} = -m[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \ddot{\vec{R}}]$$

recebe o nome de forças de inércia.