



Figura 1: Figura representativa para a partícula no looping.

Partícula no looping

Vamos aqui considerar um problema clássico do curso de Física 1 que serve para fixar ideias e oferece um exemplo interessante para aplicação dos vínculos na lagrangiana. Chamo também atenção que usaremos o conceito de “constante do movimento”, que será bastante importante mais adiante.

O problema da partícula no looping pode ser enunciado, com referência ao esquema da figura 1, da seguinte maneira: a partir de que altura H , como função de R (raio do looping), uma partícula de massa m terá energia suficiente para completar o looping?

A resposta ingênua, e errada, seria que $H = 2R$, que desconsidera o fato que a partícula deve possuir energia cinética de rotação, medida com respeito ao centro do looping, para completar o looping. É recomendável que você obtenha solução como em física 1 antes de prosseguir com esta leitura.

Aqui, iremos formular o problema em termos do formalismo de Lagrange com vínculos. Primeiro, adotamos as coordenadas generalizadas x e y assinaladas na figura e escrevemos $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 + mgy$$

Mas note que a formulação sem o vínculo é incompleta. Portanto:

$$\begin{cases} \mathcal{L} &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 + mgy \\ g(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2} - R \end{cases}$$

(*tarefa*: tenha certeza que você entendeu porque $U(y) = -mgy$) onde $g(x, y)$ é equação do vínculo. Uma escolha mais interessante, no entanto é adotar coordenadas r e θ , de maneira que:

$$\begin{cases} x &= r \sin \theta \\ y &= r \cos \theta \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{cases} \mathcal{L} &= \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\dot{r}^2 + mgr \cos \theta \\ g(x, y) &= r - R \end{cases}$$

(*tarefa*: obtenha esta lagrangiana a partir de $\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$). Note que esta é a lagrangiana para a partícula no looping. Para ter certeza que você entende as coordenadas utilizadas, escreva quais são as coordenadas (r, θ) para a partícula na base do looping e na extremidade superior. Note que não usaremos $r = R$ e $\dot{r} = 0$! Por que não? Exatamente porque queremos informação sobre o vínculo que mantém a partícula no looping! Este vínculo age sobre a coordenada r !

As equações do movimento se escrevem:

$$\begin{cases} -mgr \sin \theta - mr^2 \ddot{\theta} - mr\dot{\theta} &= 0 \\ mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - m\ddot{r} + \lambda &= 0 \\ r - R &= 0 \end{cases}$$

Neste momento, aplicamos o vínculo ($r = R$) e resolvemos para λ .

$$\begin{cases} \lambda &= -mR\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta \\ 0 &= mgR \sin \theta + mR^2 \ddot{\theta} \end{cases}$$

Agora um ponto importante: observamos que a equação para θ , se escreve:

$$\frac{d}{dt}[-mgR \cos \theta + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2] = 0$$

(tarefa: verifique esta afirmação). Desta maneira:

$$-mgR \cos \theta + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = K$$

onde K é uma constante. Ou seja, para a partícula no looping esta quantidade é constante. De fato, podemos interpretar esta quantidade como a energia mecânica da partícula. Note que temos na base e no topo do looping a seguinte expressão para K :

$$\begin{cases} K_{base} &= -mgR + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_{base}^2 \\ K_{topo} &= mgR + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_{topo}^2 \end{cases}$$

Note que o termo $\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_{base}^2$ é a energia cinética da partícula na base. Esta energia pode ser conectada com a energia potencial da partícula quando a mesma estava em repouso em uma altura H . De fato:

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_{base}^2 = mgH$$

(tarefa: tenha certeza que você entendeu este ponto) Portanto:

$$K_{base} = -mgR + mgH$$

Guardamos este resultado e trabalhamos a expressão para λ em termos de K . Lembramos que:

$$\lambda = -mR\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta$$

Usando a expressão para K , temos:

$$mR\dot{\theta}^2 = \frac{2K}{R} + 2mg \cos \theta$$

Portanto:

$$\lambda = -[\frac{2K}{R} + 2mg \cos \theta] - mg \cos \theta$$

Ou ainda:

$$\lambda = -[\frac{2K}{R} + 3mg \cos \theta]$$

A força de vínculo Q_r se escreve:

$$Q_r = \frac{\partial g}{\partial r} \lambda = \lambda$$

Agora, evocamos $K = -mgR + mgH$ e avaliamos Q_r no topo do looping (lembre-se que K é constante no looping, portanto K pode ser determinado para qualquer ponto no looping):

$$\begin{aligned} Q_r &= -\left[\frac{-2mgR + 2mgH}{R} + 3mg \cos \theta\right]_{\theta=\pi} \\ &= -\left[\frac{-2mgR + 2mgH}{R} - 3mgR\right] \end{aligned}$$

A condição para que a partícula desgrude da superfície é $Q_r = 0$, daí:

$$H = \frac{5R}{2}$$

Que é o resultado de física 1! Ou seja, a altura mínima da qual a partícula deve iniciar o movimento é $H = 5R/2$!