Movimento em meios resistivos

Nesta aula iremos tratar movimentos na presença de forças resistivas. Trata-se de um objeto de estudo complicado, com importantes ramificações nas diversas áreas das ciências básicas e aplicadas. Iremos nesta aula expor alguns modelos simplificados, e ainda sim suficientemente complicados, com o objetivo de entender algumas questões gerais sobre este tipo de dinâmica.

Um dos pontos que primeiro salta aos olhos diz respeito ao fato que a dinâmica em meios viscosos não é universal, no sentido que é altamente dependente do modelo de escolha para lidar com o problema. Por modelo, devemos entender a maneira como o meio interfere na dinâmica do sistema. Após completarmos esta etapa, o procedimento é resolver as equações do movimento levando em conta estas novas forças.

O primeiro ponto a ser considerado em nosso modelo é algo que vêm da experiência cotidiana. Parece razoável supor que as forças envolvidas neste processo sejam dependentes da velocidade. E mais, estas forças parecem aumentar com a velocidade e sempre encontram em direção oposta à velocidade ($-\boldsymbol{v}$).

Vamos separar nosso problema em dois: vamos tratar as forças de contato entre um objeto e uma superfície (por exemplo, um bloco num plano inclinado) e forças que surgem quando um objeto se desloca num fluído (uma bactéria num meio de cultura, um objeto em queda). Ao primeiro tipo, reservaremos o nome de força de atrito e, ao segundo tipo, de forças de arraste.

Porque é importante fazer esta distinção? Bem, forças de atrito, como definimos acima, surgem como resposta a força normal $\boldsymbol{F}_N$, e parece ser mais conveniente fazer um modelo da seguinte forma:

$$\boldsymbol{F}_{at} = -(\mu N)\hat{v}$$

onde N é o módulo da força normal entre a superfície e o objeto. Qualquer sofisticação deste modelo é bastante difícil, uma vez que envolve considerações sobre a elasticidade dos corpos, deformação de superfícies, etc... daí, não consideramos uma dependência explícita velocidade para $\boldsymbol{F}_{at}$. Mas podemos, como é feito em Física básica, considerar a existência de dois coeficients de atrito, que podemos chamar cinético, μ_C, ou estático, μ_E. Para forças de arraste (ou resistência), as forças surgem da interação da partícula com o fluído. A solução deste problema se dá por meio da equação de Navier-Stockes, cuja discussão está fora do escopo do presente curso. Adotaremos uma abordagem fenomenológica, segundo a qual a maneira mais conveniente de se escrever a lei da força é:

$$\boldsymbol{F}_{\text{arraste}} = -\sum_n k_n v^n \frac{\boldsymbol{v}}{v}$$

onde m é a massa do objeto e k_n são constantes a serem determinadas para o problema em particular. Ou seja, as forças do fluido sobre a particula em um determinado tempo t' são proporcionais a potências da velocidade da partícula neste mesmo tempo t'. A dinâmica que decorre desta escolha pode ser bastante intricada.

As forças de arraste

Vamos aqui considerar objetos em um meio viscoso em uma dinâmica com velocidades que sejam menores que a velocidade do som naquele meio. Nesta circunstância, tomamos apenas os termos $n = 1$ e $n = 2$ da expressão geral acima. O módulo da força de arraste escreve-se

$$F = bv + cv^2$$

com $\boldsymbol{F} = -F\hat{v}$. Nesta expressão, b e c são constantes cujo significado físico precisa ser discutido. Primeiro, vamos estabelecer o conceito de velocidade crítica, que chamaremos v_c. Escrevemos um diagrama para comparar as forças proporcionais a v e a v^2. Inicialmente bv domina, mas para altas velocidades temos que cv^2. Mas lembremos que "alta" e "baixa" velocidades são conceitos relativos, portanto, precisamos de uma escala de para fazer a comparação. Existe uma velocidade para a qual estas contribuições são iguais, e a chamamos velocidade crítica. Podemos determinar v_c em termos da expressão para a força. O que queremos é determinar a velocidade para a qual:

$$\frac{bv_c}{cv_c^2} = 1$$

Desta maneira:

$$v_c = \frac{b}{c}$$

(*Tarefa:* faça o diagrama descrito em palavras e localize v_c)

Perceba que agora podemos dizer o seguinte: para velocidades muitos maiores que v_c, o termo cv^2 é dominante, enquanto que para $v \ll v_c$ o termo linear é dominante. Mas qual a ordem de grandeza de v_c? Para tal precisamos, necessariamente, ter uma interpretação Física para as constantes b e c. Ou seja, que parâmetros físicos reais dos sistemas que você quer modelar determinam b e c? O que você acha?

É razoável supormos que b e c agregam tanto características do meio como do objeto. Exemplo: se você deixar cair uma esfera de raio R, a dinâmica deste objeto será distinta da dinâmica de uma esfera, de mesma massa, de raio $2R$. Portanto, a geometria do objeto é um fator importante. É notável também que um mesmo objeto tem uma dinâmica distinta no ar e na água. Portanto, há também uma influência do meio (chamaremos este meio de fluído).

O que usaremos a seguir é validado por experimentos e certamente existe um caminho longo até tirarmos esta conclusão. Mas o que temos é o seguinte: o termo linear em v (b) depende da viscosidade do fluído e de um tamanho característico do objeto. Este termo é devido a força viscosa. Podemos fatorar a constante b da seguinte maneira:

$$b \propto \eta l$$

Onde η é devido ao fluído (viscosidade) e l devido a geometria. Já o termo quadrático em v (c) depende da densidade do fluído e do quadrado de uma distância característica do objeto. Na verdade depende de sua *área transversal.*

$$c \propto \rho l^2$$

Perceba que estamos sendo cuidadosos em utilizar o simbolo $\propto$, que expressa proporcionalidade, e não o de igualdade. O ponto é simplesmente o seguinte: ainda não incorporamos a geometria específica. Estamos genericamente falando sobre um "comprimento característico l". A geometria, no entanto, nos dará um fator geométrico, um número, que precisa ser calculado por técnicas específicas de cada área do estudo de fluídos. Para fixarmos idéias, e pensarmos em ordens de grandeza, vamos considerar o caso particular de esferas sob resistência do ar. Nesta situação:

$$F = \beta D v + \gamma D^2 v^2$$

onde:

$$\begin{cases}\beta = 1.6 \times 10^{-4} \mathrm{Ns/m^2} \quad \gamma = 0.25 \mathrm{Ns^2/m^4}\end{cases}$$

E D é o diâmetro da esfera em partícular (o caso da esfera é altamente simplificador poir seu diâmetro, ou raio, é o único comprimento caracterítico do problema). Desta maneira, podemos calcular v_c para uma pequena esfera. O número que calculamos é o seguinte:

$$v_c = \frac{1.6 \times 10^{-4}}{0.25} \frac{1}{D} = 6.4 \times 10^{-4} \frac{1}{D}$$

Lembremos agora que se simplesmente deixamos um corpo em queda livre, a *força resultante* em $t = 0$ é, de fato, mg. Portanto, inicialmente a aceleração da pedra é 10 $\mathrm{m/s^2}$. Vamos pensar em uma pedra de 1 cm, isso corresponde a $v_c = 6.4 \times 10^{-2}$ m/s. Dado que inicialmente a aceleração da pedra é de $g = 10$ $\mathrm{m/s^2}$, em cerca de 0.01s a pedra terá uma velocidade próxima a 0.1 m/s. Portanto, a dinâmica já está certamente no regime no qual $F(v) \propto v^2$! Fica sugerido, portanto, que raras são as vezes na qual uma força linear em v possa ser considerada uma aproximação razoável!

Ou seja, a dinâmica de objetos grandes é dominada por forças de arraste do tipo v^2. Para objetos muito pequenos, a força é do tipo v. Estas idéias podem ser generalizadas se definirmos o chamado número de Reinolds $\mathcal{R}$. O número de Reinolds relaciona propriedades do fluido e da geometria do objeto. Perceba que a razão entre os dois termos das forças de arraste é certamente uma quantidade adimensional. Vamos definir $\mathcal{R}$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{R} = \frac{\rho}{\eta} D v$$

Que é praticamente a razão entre estes dois termos de força, a menos de alguma constante geométrica. Desta maneira, para movimentos com $\mathcal{R}$ pequeno, temos que as forças viscosas dominam, no regime contrário, as forças de proporcionais a ρ dominam.

Número de Reinolds pequeno

Vamos tratar iniciamente a dinâmica de uma partícula para a qual $\mathcal{R} \ll 1$, com condições iniciais $\boldsymbol{r}_0$ e $\boldsymbol{v}_0$, sujeita a uma força constante. Vamos usar este exemplo para introduzir o conceito de velocidade terminal. Como $\mathcal{R} \ll 1$, temos que a dinâmica é dominada pelo termo linear ($\boldsymbol{F}_{\text{arraste}} = -bv\hat{v} = -b\boldsymbol{v}$).

Primeiro, consideramos o diagrama das forças sobre o corpo:

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\text{arraste}} + \boldsymbol{F}_0$$

Consideramos a força $\boldsymbol{F}_0$ na direção $-\hat{k}$ ($\boldsymbol{F} = -F_0\hat{k}$) e adotamos coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases}\sum F_x &= -bv_x \\ \sum F_y &= -bv_y \\ \sum F_z &= -F_0 - bv_z\end{cases}$$

Perceba que: $\boldsymbol{F}_{\text{arraste}} = -b[v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}]$. Comparando com a segunda lei de Newton, escrevemos as equações do movimento:

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -bv_x \\ m\ddot{y} &= -bv_y \\ m\ddot{z} &= -F_0 - bv_z \end{cases}$$

(*Tarefa:* considere o digrama de forças de uma partícula subindo e de uma partícula descendo. Verifique que, em ambos os casos, a equação acima para a coordenada z está correta.)

Percebam que o problema para as componentes x e y são totalmente equivalentes e, por isso, precisamos resolve-los uma única vez. Já o problema para a componente z difere do problema das demais. Consideramos usar o método de separação de variáveis. Vamos começar com as equações mais fáceis:

$$m\ddot{x} = -bv_x$$

$$m\frac{d}{dt}v_x = -bv_x$$

$$\frac{dv_x}{v_x} = (-b/m)dt$$

$$\ln v_x(t)/v_x(0) = (-b/m)(t-0)$$

E, finalmente, temos a solução para $v_x(t)$

$$v_x(t) = v_{0x}\exp(-\frac{b}{m}t)$$

Podemos obter $x(t)$ integrando esta $v_x(t)$:

$$x(t) - x_0 = \int_0^t v_{0x}\exp(-\frac{b}{m}t)dt$$

$$x(t) = v_{0x}(-\frac{m}{b})\exp(-\frac{b}{m}t)|_0^t + x_0$$

$$x(t) = v_{0x}(-\frac{m}{b})\exp(-\frac{b}{m}t) + (x_0 + v_{0x}\frac{m}{b})$$

Uma expressão correspondente é válida para $y(t)$. A interpretação desta equação não é difícil. A força viscosa desacelera a partícula de massa m até que a mesma atinge o repouso. Importante notar que existe um máximo deslocamento que é dado por $v_{0x}m/b$ que depende, portanto, da geometria e massa do objeto e ainda da viscosidade do meio. Olhamos agora a equação para a componente $\ddot{z}(t)$:

$$m\ddot{z} = -F_0 - b\dot{z}$$

A equação pode ser integrada facilmente considerando a seguinte substituição:

$$w = \dot{z}$$

$$\dot{w} = -g - kw =$$

onde $k = b/m$ e $g = F_0/m$.

$$\frac{dw}{(g+kw)} = -dt$$

$$\frac{1}{k}ln[\frac{g+kw(t)}{g+kw(0)}] = -t|_0^t$$

$$ln[\frac{g+kw(t)}{g+kw(0)}] = -kt|_0^t$$

$$\frac{g+kw(t)}{g+kw(0)} = \exp(-kt)$$

Tomando exponenciais dos dois lados:

$$g + kw(t) = \exp(-kt)[g + kw(0)]$$

E, finalmente, usando as condições iniciais e voltando para o problema original onde v

$$\dot{z}(t) = \frac{(g + kv_{0z})}{k}\exp(-kt) - \frac{g}{k}$$

Agora integramos mais uma vez para encontrar $z(t)$

$$z(t) - z(0) = \int (\frac{(g+kv_{0z})}{k}e^{-kt} - \frac{g}{k})dt$$

$$z(t) = (\frac{(g+kv_{0z})}{k}(\frac{-1}{k})e^{-kt}) - \frac{g}{k}t)|_0^t + z(0)$$

Finalmente, escrevendo $z(t)$ com condições iniciais para $z(0)$:

$$z(t) = z_0 - \frac{g}{k}t + \frac{(g+kv_{0z})}{k^2}(1 - e^{-kt})$$

Muitas coisas interessantes podem ser ditas sobre estes resultados. Primeiro, nota-se que para tempos muito grandes, a força viscosa irá equilibrar com a força constante $\boldsymbol{F}_0$ e o resultado é que a velocidade do objeto torna-se constante. Esta velocidade tem o nome de *velocidade terminal.* Um jeito de encontrar a velocidade terminal de um objeto é tomar o limite para $t \to \infty$ na Eq.

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{(g+kv_{0z})}{k}\exp(-kt) - \frac{g}{k} = -\frac{mg}{b}$$

Ou pode-se simplesmente olhar a equação de movimento e ver o momento de equilibrio de forças:

$$m\ddot{z} = -F_0 - b\dot{z}$$

O resultado é o mesmo. Perceba ainda que para t suficientemente grande, o comportamento de $z(t)$ é o comportamento esperado para um movimento com velocidade constante. (*Tarefa:* mostre que as expressões para $z(t)$ sem $t = 0$ é igual a z_0 e que para $t \to \infty$ a expressão é o de um movimento uniforme com velocidade igual a velocidade terminal)

Alguns casos de interesse

O problema que resolvemos para a força linear pode descrever uma pequena partícula carregada em um campo elétrico constante a se mover em um meio viscoso. Nesta situação, uma vez que a partícula é pequena, é bem possível que a dinâmica seja dominada pelas forças viscosa $\propto v$, de maneira que nossos resultados acima são inteiramente aplicáveis. Se a partícula tem carga q e massa m, podemos escrever e o campo elétrico em questão se escreve $\boldsymbol{E} = -E_0\hat{k}$.

$$\begin{cases} m\ddot{x} & = -bv_x \\ m\ddot{y} & = -bv_y \\ m\ddot{z} & = -qE_0 - bv_z \end{cases}$$

Outra questão importante sobre movimentos dominados por forças viscosas, é que este se aplica a maior parte dos problemas de interesse biológico. Um exemplo importante é o problema de natação de microorganismos (como células). Na verdade, trata-se de um dos problemas mais interessantes atualmente, devido a capacidade recentemente desenvolvidas de trabalhar com pinças ópticas (recentemente agraciado com prêmio Nobel em Física). Para o movimento linear, sem forças, com uma certa velocidade v_{0x} , temos o seguinte

$$x(t) = v_{0x}(-\frac{m}{b})\exp(-\frac{b}{m}t) + (x_0 + v_{0x}(\frac{m}{b}))$$

O deslocamento de uma partícula $\Delta x(t) = x(t) - x_0$ neste contexto é

$$\Delta x(t) = v_{0x}(-\frac{m}{b})\exp(-\frac{b}{m}t) + v_{0x}(\frac{m}{b})$$

Tomando o limite de t grande, temos o seguinte:

$$\Delta x_{max} = v_{0x}(m/b) \approx (v_{0x})(m)/(l\eta)$$

Para este microorganismo, podemos usar os seguintes dados $v_{0x} = 30$ μm/s, $\eta = 10^{-3}$ kg.m^{-1}.s^{-1} e $l = 10^{-6}$ m

$$\Delta x_{max} \approx (30 \times 10^{-6})(4 \times 10^{-15})\frac{1}{(10^{-3} \times 10^{-6})} \approx 10^{-10}\text{m}$$

Este resultado é muito importante pois diz exatamente o que significa um número de Reinolds pequeno. Suponha que o microorganismo tem um flagelo, ou um intricado sistema de cílios, que o faz nadar com uma certa velocidade. Desta maneira, assim que o sistema deixa de contribuir para sua impulsão, o mesmo se desloca por apenas 10^{-10}m, o que significa que, praticamente, não há qualquer efeito de inércia!

Gostaria de falar um pouco mais, apenas para cultura geral , sobre este tipo de movimento. Existe uma consequência muito importante para esta relevância de forças viscosas. Suponha que um pequeno ser tenha apenas um eixo que ele pode abrir e fechar e o utilize de maneira a gerar uma propulsão. Este ser, tentando nadar, realiza um certo movimento de maneira a empurrar o fluído e, por ação e reação, ser empurrado. Na presença de inércia, o ser poderia fazer uma contração rápida e retomar o ciclo bem devagar, gerando assim um movimento líquido. Na ausência de inércia o ser deixaria de se mover no momento que a primeira fase do ciclo termine (sem forças, sem movimento). Ao completar o ciclo, este ser voltaria ao mesmo lugar do início do ciclo. O movimento líquido seria zero! A única maneira para este pequeno ser se mexer é que ele tenha, efetivamente, pelo o menos dois graus de liberdade. Este resultado é conhecido como teorema da concha.

Discussão qualitativa para projéteis

Comentado agora o limite oposto, o de número de Reinolds grande, podem entender que ocorre com um projétil. Para este caso $\boldsymbol{F} = -cv^2\hat{v}$ e o caso geral é muito mais complicado que podemos supor inicialmente. Adotando coordenadas cartesianas, escrevemos:

$$\boldsymbol{F} = -cv\boldsymbol{v} = -c(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}(\dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k})$$

Ou seja, a equação é acoplada de maneira não trivial! Perceba também que a dinâmica em qualquer das direções será dependente da dinâmica em outras direções, uma situação qualitativamente distinta da situação do projétil livre. Um resultado analítico pode ser obtido considerando a situação na qual as velocida nas direções $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ são nulas e estamos interessados apenas com o que ocoore na direção $\hat{k}$. Consideremos condições iniciais z_0 e v_{0z}. Escrevendo diretamente a equação do movimento temos:

$$m\ddot{z}(t) = -mg + cv^2$$

Perceba que $\boldsymbol{F} = -c\sqrt{\dot{z}^2}\dot{z}\hat{k} = c\dot{z}^2\hat{k}$. Podemos escrever diretamente a velocidade terminal deste movimento:

$$0 = -mg + cv_t^2$$

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

Agora, podemos discutir o seguinte ponto. Suponha que temos dois cones feitos em cartolina. Um cone é feito de uma cartolina quadrada de de comprimento l e outro de uma cartolina de comprimento $2l$. Qual dos cones tem maior velocidade terminal? A análise dimensional nos mostra que os dois objetos terão a mesma velocidade terminal. Percebam que $m \propto L^2$ mas que $c \propto L^2$. O resultado final independe do tamanho do objeto (desde que permaneça válido que $\mathcal{R} \to \infty$). Se compararmos, no entanto, objeto de materiais diferentes, a resposta muda. O material mais denso cai mais rápido. O que esta fórmula nos mostra, portanto, é que o objeto mais denso tem maior velocidade terminal.