

Teorema de Bertrand

O teorema de Bertrand é um resultado referente as condições para existência de órbitas fechadas para o problema de forças centrais (*arefa:* lembre o que são órbitas fechadas e diferencie órbitas fechadas de órbitas limitadas). Os ingredientes principais para a solução deste problema são os teoremas de conservação. Assim como na primeira parte do curso, onde aplicamos os teoremas de conservação ao problema de forças centrais, iremos fazer o mesmo nesse momento. Considerem, portanto, uma partícula sujeita a um potencial central $U(r)$, nossa lagrangiana para o sistema se escreve:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - U(r)$$

Esta lagrangiana é cíclica em ϕ o que significa que o momento conjugado (ou generalizado) p_ϕ é conservado:

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}$$

que reconhecemos como o momento angular ao longo do eixo z ($p_\phi = l_z$). Como visto, este formalismo nos permite encontrar imediatamente a equação de movimento para r . De fato, a equação de movimento de Lagrange para r é:

$$mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U(r)}{\partial r} - m\ddot{r} = 0$$

de maneira que (substituindo $\dot{\phi}$ e também $f(r) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}$):

$$m\ddot{r} = f(r) + \frac{p_\phi^2}{mr^3}$$

(*Tarefa:* lembre que esta é mesma equação diferencial para $\ddot{r}$ que seria obtida por meio das equações de Newton). Note que para MCU temos:

$$\frac{p_\phi^2}{mr_0^3} = -f(r_0)$$

Sabemos da parte I do curso que o MCU está associado a um certo valor para a energia mecânica total E que denotamos E_0 . Note que o MCU é um órbita limitada e fechada. No presente caso, estamos interessados em entender sob que condições órbitas com energia $E \gtrsim E_0$ permanecem *limitadas e fechadas*. Apenas por conveniência $p_\phi = l$, onde l é uma constante.

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{m^2r^3} = \frac{1}{m}f(r) \tag{1}$$

Fazemos agora a mudança de variáveis, similar a que fizemos para resolver o problema de Kepler:

$$u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)}$$

$$\dot{u}(\phi) = -\frac{1}{r(\phi)^2} \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi}$$

Cujo resultado é:

$$\frac{d^2}{d\phi^2} u + u = -\frac{m}{l^2 u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \quad (2)$$

O queremos analisar são órbitas para as quais $E \gtrsim E_0$. Sabemos que quando $E = E_0$, a órbita se dá em $r_0 = 1/u_0$. Neste caso, u_0 pode ser calculado a partir da equação da órbita (Eq. 2):

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} u + u\right]_{u=u_0} = \left[-\frac{m}{l^2 u^2} f\left(\frac{1}{u}\right)\right]_{u=u_0}$$

$$u_0 = -\frac{m}{l^2 u_0^2} f\left(\frac{1}{u_0}\right)$$

Para entender o que ocorre na vizinhança de u_0 , o primeiro passo é definir a seguinte função:

$$J(u) = -\frac{m}{l^2 u^2} f\left(\frac{1}{u}\right)$$

Uma órbita com energia levemente superior corresponde a raios que sejam um pouco maiores que r_0 . Desta maneira, sugere-se expandir $J(u)$ na vizinhança de u_0 . O esquema fica assim:

$$J(u) = J(u_0) + (u - u_0) \frac{dJ}{du} \Big|_{u=u_0} + \dots$$

Vamos denotar esta vizinhança de u_0 como $x = u - u_0$ ou seja, x mede a deformação da órbita. Perceba que $x/u_0 = x r_0 \ll 1$. Perceba ainda que $\ddot{u} = \ddot{x}$, de maneira que nossa eq. fica:

$$\frac{d^2}{d\phi^2} x + x + u_0 \approx J(u_0) + x \frac{dJ}{du} \Big|_{u=u_0} \quad (3)$$

Prosseguimos considerando apenas termos de até primeira ordem em x . Agora usamos a definição da função $J(u)$ para calcular $J(u_0)$. A partir da equação de movimento para r , temos:

$$J(u_0) = -\frac{m}{l^2 u_0^2} f\left(\frac{1}{u_0}\right) = u_0$$

Como vista acima. (*tarefa:* verifique seu entendimento sobre $J(u_0)$). Com isto, fixamos novamente nossa atenção à Eq. 3 para a deformação $x(\phi)$. Usando o resultado para $J(u_0)$, escrevemos:

$$\frac{d^2}{d\phi^2} x + \left(1 - \frac{dJ}{du} \Big|_{u=u_0}\right) x = 0$$

Prontamente, reconhecemos esta equação como a equação diferencial do “oscilador harmônico”, mas para tal precisamos que:

$$\left(1 - \frac{dJ}{du} \Big|_{u=u_0}\right) > 0$$

Vamos chamar esta quantidade de β^2 e analisá-la. Para termos um “oscilador harmônico”, precisamos que:

$$\beta^2 = (1 - \frac{dJ}{du}|_{u=u_0}) > 0$$

Note que o termo:

$$\frac{dJ}{du}|_{u=u_0}$$

depende da força particular sendo estudada (*tarefa:* calcule este termo para a força $f(r) = -kr$). Se voltarmos para nossa eq. para x , temos o seguinte:

$$x = a \cos \beta \phi$$

(de fato temos $x = a \cos \beta \phi + b \sin \beta \phi$, esta forma para $x(\phi)$ está ligada a condições iniciais particulares, quais?) De maneira que a solução aproximada para $u(\phi)$ se escreve:

$$u(\phi) = u_0 + a \cos \beta \phi$$

Ou, em termos de $r(\phi)$, temos:

$$\frac{1}{r(\phi)} = \frac{1}{r_0} + a \cos \beta \phi$$

Ou ainda:

$$r(\phi) = (\frac{1}{r_0} + a \cos \beta \phi)^{-1} \approx r_0(1 - ar_0 \cos \beta \phi)$$

(pois $ar_0 \ll 1$). Portanto, a equação que temos é o de um movimento circular acrescido de uma deformação $ar_0 \cos \beta \phi$. Note que o período (angular) desta variação se escreve: $T = 2\pi/\beta$. Temos agora todas as condições necessárias para órbitas *limitadas e fechadas*:

$$\begin{cases} \beta^2 > 0 \\ \beta = \text{racional} \end{cases}$$

Considerações gerais sobre $J(u)$

Para tirarmos conclusões gerais sobre este termo, precisamos calcular dJ/du . Para tal, relembremos a definição de $J(u)$:

$$J(u) = -\frac{m}{l^2 u^2} f(\frac{1}{u})$$

Cuja derivada se escreve:

$$\frac{dJ}{du}|_{u=u_0} = [\frac{2m}{l^2 u^3} f(\frac{1}{u}) - \frac{m}{l^2 u^2} \frac{d}{du} f(\frac{1}{u})]|_{u=u_0} = -\frac{2J}{u}|_{u=u_0} - \frac{m}{l^2 u^2} \frac{d}{du} f(\frac{1}{u})|_{u=u_0} \quad (4)$$

Para avaliar os termos acima, precisamos apenas nos lembrarmos da equação de movimento para forças centrais (Eq. 1) e da definição da função $J(u)$. De fato, temos:

$$\begin{cases} J(u_0) &= -\frac{m}{l^2 u_0^2} f(\frac{1}{u_0}) \\ f(1/u_0) &= f(r_0) = -\frac{l^2}{mr_0^3} = -\frac{l^2}{m} u_0^3 \end{cases}$$

De maneira que a Eq. 4 se escreve (usando a notação $f_0 = f(1/u_0) = f(r_0)$):

$$\frac{dJ}{du}|_{u=u_0} = -2 + \frac{u_0}{f_0} \frac{d}{du} f\left(\frac{1}{u}\right)|_{u=u_0}$$

e, com isso, temos β^2 :

$$\beta^2 = 3 - \frac{u_0}{f_0} \frac{d}{du} f\left(\frac{1}{u}\right)|_{u=u_0} > 0$$

Para que a discussão fique mais clara, é interessante retornarmos para a variável r :

$$\frac{df}{du} \rightarrow \frac{df}{dr} \frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2} \frac{df}{dr}$$

De maneira que:

$$\frac{u_0}{f_0} \frac{d}{du} f\left(\frac{1}{u}\right)|_{u=u_0} = -\frac{r_0}{f(r_0)} \frac{d}{dr} f(r)|_{r=r_0}$$

(lembre-se da equação $-\frac{l^2}{mr_0^3} = f(r_0)$)

$$\beta^2 = 3 + \frac{r_0}{f_0} \frac{d}{dr} f(r)|_{r=r_0} > 0$$

Suponha que podemos escrever:

$$f(r) = -\frac{k}{r^n}$$

Calculando os termos para β^2 , temos:

$$\beta^2 = 3 - n$$

(*tarefa*: deduza esta expressão para β^2). Note que dado $f(r) = -k/r^n$, temos:

$$U(r) = \frac{1}{-n+1} k r^{-n+1}$$

Comentários finais

Isso no entanto, não conta toda a história. Perceba que estamos considerando uma pequena perturbação para a órbita circular. E se considerarmos perturbações maiores, o que acontece? Neste caso, precisamos considerar termo de ordem maior que 1 na expansão de J . Se fizermos isso, teremos um resultado impressionante: apenas órbitas para as quais $\beta = 1$ ($n = 2$) e $\beta = 2$ ($n = -1$) permanecem limitadas e fechadas! Ou seja, apenas os potenciais $-k/r$ e kr^2 é que possuem órbitas estáveis para grandes deformações.

Para melhor entender esta teoria, considere as Figs. 1(a)-(b) e 2(a)-(b). As órbitas circulares são determinadas pelo mínimo do potencial efetivo r_0 . Ao permitir energias levemente superiores à E_0 , a órbita sofre uma pequena deformação $x(\phi)$ que encontramos acima. A nova órbita passa a ser dada pela seguinte equação:

$$u(\phi) \approx u_0 + x(\phi)$$

$$\frac{1}{r(\phi)} \approx \frac{1}{r_0} + a \cos \beta \phi$$

Perceba que $ar_0 \ll 1$. Logo, a nova órbita é como um círculo deformado pela presença deste novo termo.

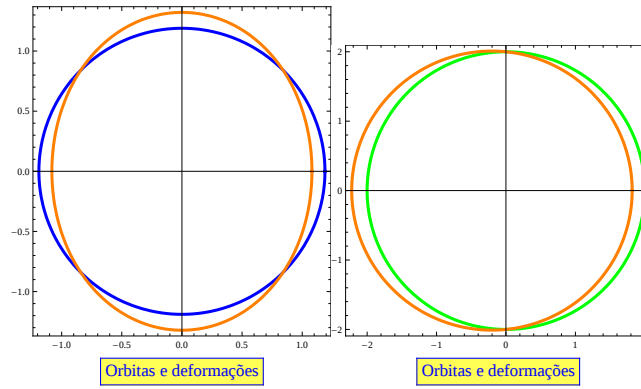


Figura 1: Órbitas circulares e deformadas para os potenciais $n = -1$, à direita, e $n = 2$, à esquerda. Estes casos correspondem aos potenciais harmônico e gravitacional, respectivamente. Em ambos painéis as órbitas deformadas são mostradas em laranja. Perceba que para o caso harmônico, a órbita já adquire sua forma de elipse centrada na origem. Para o caso gravitacional, perceba que a órbita se desloca para a esquerda, mostrando que o centro da órbita é o foco.

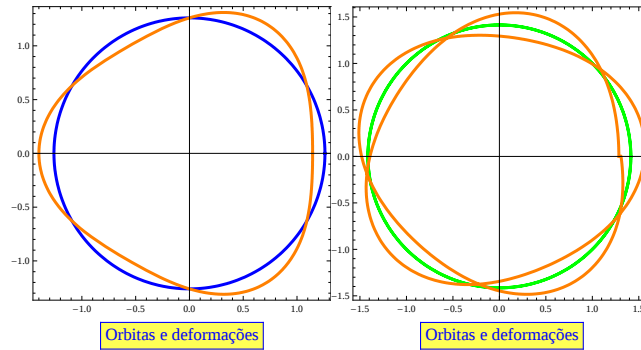


Figura 2: Órbitas circulares e deformadas para os potenciais $n = -6$, à direita, e $n = -3$, à esquerda. Em ambos painéis as órbitas deformadas são mostradas em laranja. Para o caso $n = -6$, temos $\beta = 3$ e a órbita é fechada de acordo com os critérios estudados. Perceba os três máximos e mínimos da órbita devido a modulação imposta pela deformação. Para o caso $n = -3$, $\beta = \sqrt{6}$ e a órbita é aberta. Perceba no detalhe que a órbita não fecha. Neste caso, plotamos 2 revoluções.