

Partícula no campo eletromagnético

Vamos deduzir a Hamiltoniana de uma partícula clássica no campo eletromagnético. Este resultado é certamente dos mais importantes deste curso. Para chegar ao resultado, precisamos introduzir o conceito do potencial generalizado. Este conceito diz respeito a situações onde as forças dependem da velocidade, mas de uma maneira muito particular. Relembremos que toda nossa dedução do formalismo de Lagrange tinha como hipótese que $\mathcal{L}$ é função de q , $\dot{q}$ e t . Nesta direção, não há mudanças a serem feitas às equações de movimento de Lagrange caso U dependa das velocidades generalizadas $\dot{q}$.

Vamos então supor que temos uma força que possa ser deduzida a partir de um potencial U da seguinte maneira:

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \quad (1)$$

Neste caso, U é chamado potencial generalizado e $\mathcal{L} = T - U$. Existem várias aplicações deste conceito e aqui vamos considerar a aplicação para uma partícula no campo eletromagnético. Muito o que faremos aqui só será justificado de um ponto de vista puramente matemático. A física associada a esta questão será explorada em cursos posteriores.

É importante, antes de tudo, considerar nossa estratégia para encontrar este potencial. Primeiramente, vamos mostrar que a força de Lorentz pode ser encontrada a partir de um potencial generalizado U (como definido pela Eq. 1) e usaremos este resultado para encontrar $\mathcal{L} = T - U$. De posse da lagrangiana, vamos escrever os momentos generalizados e, finalmente, encontrar a Hamiltoniana $\mathcal{H}$ (um bônus). Em geral, a Hamiltoniana *não será a energia total* do sistema. No entanto, para campos estáticos h , assim como $\mathcal{H}$, serão constantes do movimento.

Vamos iniciar nosso problema com duas eqs. de Maxwell.

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

O que sabemos do cálculo vetorial é que para qualquer campo vetorial $\vec{A}$, temos o seguinte:

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$$

Desta maneira, podemos certamente escrever que:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Onde chamamos $\vec{A}$ de potencial vetor do campo magnético. Podemos agora olhar a primeira eq. e ver o seguinte:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial(\nabla \times \vec{A})}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Ou seja, podemos definir um potencial ϕ , tal que:

$$-\nabla\phi = \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Este potencial não é apenas eletrostático, neste caso a configuração de carga pode depender do tempo. Usando esta linguagem, vamos escrever nossa Força de Lorentz para uma partícula carregada de carga q .

$$\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] = q[-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}))]$$

Uma expressão formidável! Vamos adotar coordenadas cartesianas e depois aprender como generalizar o resultado. Considere a expressão para a componente F_x

$$F_x = -(\nabla\phi)_x - (\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})_x + (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}))_x$$

$$\nabla \times \vec{A} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})$$

$$(\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}))_x = v_y(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) - v_z(-\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z})$$

$$(\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}))_x = v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}$$

Vamos aqui fazer o truque de somar e subtrair a quantidade $v_x \partial A_x / \partial x$

$$= v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

Esta expressão é bastante simétrica. O primeiro termo lembra um produto escalar, enquanto que o segundo termo está ligado a derivada total de A_x em relação ao tempo.

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = + \frac{\partial A_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial A_x}{\partial z} v_z$$

Logo:

$$(\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}))_x = \frac{\partial}{\partial x}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

Colocando tudo isso junto para F_x , temos:

$$F_x = q[-(\nabla\phi)_x - (\frac{\partial A}{\partial t})_x + \frac{\partial}{\partial x}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}]$$

uma vez que:

$$\begin{cases} (\nabla\phi)_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ (\frac{\partial A}{\partial t})_x &= \frac{\partial A_x}{\partial t} \end{cases}$$

ficamos com:

$$= q[-\frac{\partial}{\partial x}(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial v_x} \vec{v} \cdot \vec{A})]$$

(se você se perdeu nesta última passagem estou escrevendo o seguinte: $\frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial v_x} \vec{v} \cdot \vec{A}) = \frac{dA_x}{dt}$. Se você expandir o termo verá que:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial v_x} \vec{v} \cdot \vec{A}) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial v_x}(v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z)) = \frac{dA_x}{dt}$$

que é a expressão que usamos.)

Este é quase a forma que estamos procurando. Note que escrevemos a força de Lorentz como uma derivada das posições mais uma derivada em relação às velocidades. Os resultados para F_y e F_z seguem de maneira análoga. Para ser exatamente a forma que queremos, considere que podemos escrever a expressão acima da seguinte maneira:

$$F_x = q\{-\frac{\partial}{\partial x}(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_x}(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})\}$$

Pois ϕ não depende das velocidades. Desta maneira, o potencial generalizado que buscamos se escreve da seguinte forma:

$$U = q\phi - q\vec{v} \cdot \vec{A}$$

e a Lagrangiana fica:

$$\mathcal{L} = T - U = T - q\phi + q\vec{v} \cdot \vec{A}$$

Podemos agora escrever a Hamiltoniana de tal formulação. Se você usar a definição da Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \sum_j \dot{q}_j p_j - \mathcal{L}$$

verá que $\mathcal{H}$ se escreve $\mathcal{H} = T + q\phi$. Na linguagem da introdução destas notas, temos que $V = q\phi$. Portanto, precisamos apenas encontrar os momentos generalizados e fazer a mudança de $\mathcal{L}$ para $\mathcal{H}$. Continuando em coordenadas retangulares ela se escreve da seguinte forma:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i$$

Note que neste caso, os momento p_i 's correspondem às componente x , y e z do momento linear $\vec{P}$. Esta conexão deve ser feita com cuidado, uma vez que a interpretação do momento canônicos não é sempre tão direta. Com alguma conta, obtemos (*tarefa*: deduza esta expressão):

$$\mathcal{H} = \frac{(p_i - qA_i)(p_i - qA_i)}{2m} + q\phi$$

$$\mathcal{H} = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi$$

Perceba que quando os campos não dependem do tempo, o sistema é conservativo. Note ainda que a Hamiltoniana ao final está escrita em termos do módulo do vetor $\vec{p} - q\vec{A}$. Sabemos que o módulo de um vetor não depende do sistema de coordenadas no qual ele se escreve. Dessa maneira, a forma da Hamiltoniana que deduzimos é válida em qualquer sistema de coordenadas. Mais uma vez, cuidado é necessário para aplicar esta fórmula. Em geral, é sempre mais seguro usarmos a definição para calcular $\mathcal{H}$, que é o que faremos abaixo em nosso exemplo.

Exemplo

Vamos estudar um problema com este formalismo. Suponha que temos uma bobina de maneira que:

$$\vec{B} = B_0 \hat{z}$$

E além disso um campo elétrico que se escreve:

$$\vec{E} = \frac{a}{r} \hat{r}$$

Podemos escrever para V a seguinte expressão (sendo r_0 o raio interno da bobina):

$$V = q\phi = -qa \ln(r/r_0)$$

e você pode verificar que se definirmos $\vec{A}$ da seguinte maneira:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(-B_0 y \hat{x} + B_0 x \hat{y})$$

Temos:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} = B_0 \hat{z}$$

Podemos escrever nossa Hamiltoniana em coordenadas retangulares sem problemas, mas é interessante aqui explorar a simetria completa do sistema e escrever o problema em coordenadas cilíndricas. Desta maneira:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(-B_0 y \hat{x} + B_0 x \hat{y}) = \frac{1}{2} B_0 r \hat{\phi}$$

Que possui componentes apenas em $\hat{\phi}$. Precisamos ter cuidado ao usar a fórmula para a Hamiltoniana. Por exemplo, veja que o produto escalar tem um termo $r\dot{\phi}$ (apenas estou chamando atenção para o fato que $\vec{v} = (\dot{r}, r\dot{\phi}, \dot{z})$).

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - U = T - q\phi + q\vec{v} \cdot \vec{A} \\ &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + qa \ln r + q(r\dot{\phi} \frac{1}{2} B_0 r) \end{aligned}$$

Onde já usamos que $\partial A / \partial t$ é zero para este caso. E os momentos generalizados são

$$\begin{cases} p_r &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} + q\frac{1}{2}B_0 r^2 \\ p_z &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \end{cases}$$

Portanto:

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{(p_\phi - \frac{1}{2}qBr^2)^2}{2mr^2} + \frac{p_z^2}{2m} - qa \ln r$$

(Atenção: esta fórmula não é tão direta, requer algum trabalho!) Se olharmos as eqs. de movimento para ϕ , encontramos:

$$\begin{cases} \dot{\phi} &= \frac{(p_\phi - \frac{1}{2}qBr^2)}{mr^2} \\ \dot{p}_\phi &= 0 \end{cases}$$

Note que p_ϕ se escreve:

$$p_\phi = mr^2\dot{\phi} + q\frac{1}{2}Br^2$$

Note que p_ϕ tem um “termo” extra, devido a presença do campo magnético. O primeiro termo é já conhecido momento angular ao longo do eixo z . Já o segundo termo aparece para $B \neq 0$. Ou seja, a partícula tem um momento angular extra que tem origem na interação da carga com o campo! Note que p_z também se conserva, e podem ser interpretado como a componente z do momento linear. Este problema pode ser desenvolvido para análise de estabilidade e pequenas oscilações.