

Forças centrais

No contexto dos teoremas de conservação, investigamos o momento angular e sua relação com as chamadas forças centrais. Nessas notas, ilustramos este estudo adotando um exemplo particular. Como nosso objetivo é ilustrar os teoremas de conservação, iremos sempre fazer referências à conservação das quantidades de interesse: $\vec{P}$, $\vec{L}$ e E . Mostraremos como deduzir um método da energia, apropriado para o estudo de sistemas 3D e ainda nos dedicaremos à interpretação cuidadosa destes resultados.

Forças centrais

Nosso primeiro passo é esclarecer um pouco mais nosso objeto de estudo. Primeiro, consideremos uma partícula sob ação de uma força central. Neste caso, a força aponta para o que denominamos “centro da força”, que se encontra na origem do sistema de coordenadas. Neste caso, escrevemos:

$$\vec{F} = f(\vec{r})\hat{r}$$

No entanto, iremos restringir o nosso estudo a uma classe particular de forças centrais: iremos tratar forças centrais conservativas. Neste caso, sabemos que existe U tal que $-\nabla U = \vec{F} = f(\vec{r})\hat{r}$. Observando a expressão para o gradiente em coordenadas esféricas,

$$\nabla U = \hat{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial U}{\partial \phi}$$

chegamos a conclusão que U não pode depender de θ ou de ϕ . Caso contrário, $\vec{F}$ teria outras componentes além da componente $\hat{r}$. Portanto:

$$f(\vec{r}) = f(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

Note que forças deste tipo são, igualmente, esfericamente simétricas, uma vez que a magnitude da força depende apenas de r . Já para o caso de 2 partículas, consideramos a força ao longo da direção do vetor posição relativa. Neste caso, escrevemos:

$$\vec{F}_{1(2)} = f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\hat{r}_{1(2)}$$

e igualmente:

$$\vec{F}_{1(2)} = f(r_{12})\hat{r}_{12}$$

Perceba que no problema de 2 corpos, embora ambos os corpos estejam sujeitos a mesma força, os mesmos não desenvolvem a mesma aceleração. Para o caso no qual, digamos $m_2 \gg m_1$, podemos considerar que m_2 permanece em repouso, enquanto que apenas m_1 estará em uma situação dinâmica.

Nesta situação, a posição de m_2 , considerada fixa, representa um bom referencial inercial e, portanto, pode ser tomada como origem do sistema de coordenadas. Esta observação oferece uma interpretação física clara para o problema de um corpo: o mesmo deve ser entendido como o problema de 2 corpos na situação na qual uma das massas é muito maior que a outra. Em termos de discussões que já fizemos, isso significa identificar a função energia h do sistema com sua energia mecânica total E . No que se segue, vamos primeiro tratar este limite, para ao final das notas retomar a discussão sobre sistemas de dois corpos.

Momento e energia

Uma vez que se trata de um partícula sobre ação de uma força, é certo o momento linear $\vec{p}$ desta partícula não se conserva. No entanto, ao avaliar o torque $\vec{r} \times \vec{F}$, em relação ao centro da força é imediato que $\vec{l}$ é uma quantidade conservada. Portanto $\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{p}$ é constante. Considerando a energia potencial da partícula, notemos que podemos determinar a energia potencial devido $\vec{F}$ por integração:

$$U(r) = \int_{r_0}^r f(r) dr$$

onde r_0 é o ponto no qual $U(r_0)$ é 0. Como exemplo, considere $\vec{F} = -k/r^2 \hat{r}$. Efetuando a integração, temos:

$$U(r) = -\frac{k}{r} \Big|_{r_0}^r = -\frac{k}{r} + \frac{k}{r_0}$$

notemos que neste caso $r_0 \rightarrow \infty$ é a referência correta, e temos:

$$U(r) = -\frac{k}{r}$$

Podemos agora escrever:

$$h = \frac{m}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + U(r)$$

A conservação de $\vec{l}$, implica que a dinâmica de m está restrita a um plano, definido pelos vetores $\vec{r}$ e $\vec{v}$. Podemos adotar que este é o plano xy e ainda descrever a dinâmica de m por meio de coordenadas polares. Portanto, $\vec{l} = mr^2 \dot{\phi} \hat{k}$ é conservado ou ainda $l_z = mr^2 \dot{\phi}$ é conservado. Estas considerações são utilizadas para trabalhar a expressão para a função h e escrevemos:

$$h = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} + U(r)$$

que depende apenas da coordenada r e sua derivada $\dot{r}$. Se nos referimos ao último comentário da seção anterior, podemos encarar agora que $h \approx E$, e assim:

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} + U(r)$$

Energia potencial efetiva

Comparemos, de um ponto de vista formal, a expressão acima para E com a expressão para um sistema 1D, que reproduzimos abaixo:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

Perceba que existe uma certa equivalência: a energia, em ambos os casos, depende apenas de uma única coordenada e sua derivada! Esta observação motiva a seguinte definição:

$$V_{eff}(r) = \frac{l_z^2}{2mr^2} + U(r)$$

Que denominamos energia potencial efetiva. Note que o termo:

$$\frac{l_z^2}{2mr^2}$$

é uma fração da energia cinética e que apenas $U(r)$ é uma energia potencial “legítima”. Porque esta definição é importante? Para o caso 1D, podemos isolar $\dot{x}$ e obter a chamada primeira integral do movimento:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$

É nessa expressão na qual baseamos os argumentos para desenvolver o chamado método da energia. No presente caso, considerando a definição para V_{eff} , escrevemos:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

Ou ainda:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{eff}(r)]}$$

Que nos permite analisar a dinâmica da coordenada r da mesma maneira que antes analisamos a dinâmica da coordenada x . Deve-se apreciar que por aplicação dos teoremas de conservação tivemos sucesso em transformar um problema 3D, que envolve 3 coordenadas, em um problema efetivo que envolve apenas uma única coordenada.

Consequências para a dinâmica

Se consideramos um diagrama de energia no qual traçamos um gráfico de $V_{eff}(r)$ e valor da energia total E , podemos determinar extremos da dinâmica do sistema, observando a existência de r_{max} e r_{min} , assim como a existência de um “ponto de equilíbrio” r_{eq} . As aspas se fazem necessárias para lembrarmos que tratamos neste momento uma descrição efetiva, e não um sistema 1D autêntico. A interpretação destes “pontos especiais” do diagrama de energia é bem distinta. Para entender esta questão, analisamos a dinâmica de pequenas oscilações em torno de r_{eq} . Nesta situação, queremos:

$$V_{eff}(r) = V_{eff}(r_0) + \frac{dV_{eff}}{dr}\bigg|_{r=r_{eq}}(r - r_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\bigg|_{r=r_{eq}}(r - r_{eq})^2 + \dots$$

Considerando que expandimos em torno de um ponto de equilíbrio, temos:

$$\frac{dV_{eff}}{dr}\bigg|_{r=r_{eq}} = 0$$

Usando a definição para $V_{eff}(r)$ temos:

$$\frac{dV_{eff}}{dr}|_{r=r_{eq}} = -\frac{L_z^2}{mr_{eq}^3} + \frac{dU(r)}{dr}|_{r_{eq}} = 0$$

Note que a força do problema, é apenas o termo:

$$\frac{dU(r)}{dr} \neq 0$$

Portanto, r_{eq} não é um ponto de equilíbrio no sentido usual. De fato, há uma força resultante sobre o sistema. Mas note que durante toda a dinâmica pode-se escrever que o vetor posição de m é $\vec{r} = r_{eq}\hat{r}$. Este é o vetor posição de uma trajetória circular de raio r_{eq} . E mais, retomando a expressão para l_z , perceba que:

$$\dot{\phi} = \frac{l_z}{mr_{eq}^2} = \text{constante}$$

Denotamos este valor $\dot{\phi}_0$. Ou seja, a partícula está em movimento circular uniforme. Mas há um outro resultado importante. Note que a frequência oscilações em torno do raio de equilíbrio pode ser calculada como:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m} \frac{d^2V_{eff}}{dr^2}|_{r=r_{eq}}$$

Note que existem duas frequência no problema. Uma é devido a $\dot{\phi}_0$ é a frequência de revolução. Já a frequência ω_0 é devido a oscilação da coordenada r .

Exemplo: oscilador 3D

Para ilustrar o método desenvolvido, consideramos um corpo de massa m sob ação de uma força $\vec{F} = -Ar\hat{r}$ (algo como um oscilador 3D). Tomando o centro da força como origem do sistema de coordenadas, caracterizamos um problema de forças centrais. Note que $f(r) = -Ar$ e é imediato que:

$$U(r) = -\int_{r_0}^r f(r)dr = \frac{1}{2}Ar^2$$

onde a referência para medirmos $U(r)$ é $r_0 = 0$. A energia potencial efetiva se escreve:

$$V_{eff} = \frac{l_z^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{l_z^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}Ar^2$$

Um esboço de $V_{eff}(r)$ 1, revela o papel do termo cinético (em verde): este termo expulsa a partícula do centro da força. Por este motivo, é em geral chamado “termo centrífugo”. Note que o esboço revela que $V_{eff}(r)$ possui um mínimo. Portanto, se a energia mecânica total da partícula é $E = E_0$ (traçada em preto), a partícula está em MCU.

Perceba também que para energias $E > E_0$, a coordenada r que descreve a dinâmica da massa está restrita entre valores $r_{min} \leq r \leq r_{max}$, o que caracteriza uma órbita limitada (também conhecida como órbita ligada ou estado ligado).

Podemos agora proceder de maneira a extrair informações mais quantitativas. Primeiro, supomos $l_z \neq 0$ e procuramos o raio de MCU, que chamaremos r_{eq} . Queremos encontrar:

$$\frac{dV_{eff}(r)}{dr}|_{r=r_{eq}} = 0$$

Que para o presente problema se traduz em:

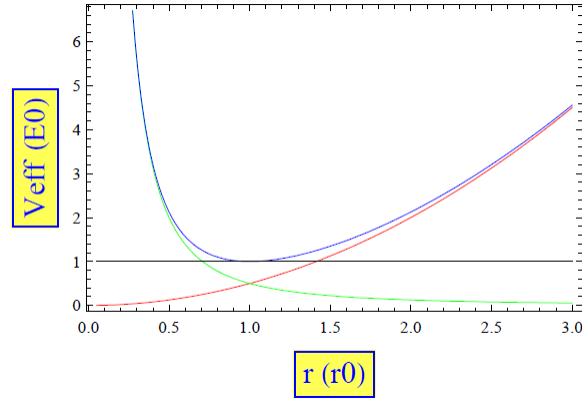


Figura 1: Figura para a energia potencial efetiva para o caso $U(r) = \frac{1}{2}Ar^2$. Em verde, vermelho e azul são mostrados, respectivamente, a contribuição centrífuga, a energia Ar^2 e $V_{eff}(r)$. A linha preta marca o mínimo da energia, onde $E_0 = V_{eff}(r_0)$. Perceba que as unidades estão apresentadas em termos de E_{min} e r_{eq} . Note ainda que para qualquer valor de $E > E_0$ a dinâmica da partícula sob ação de $f(r)$ é limitada.

$$\frac{-l_z^2}{mr_{eq}^3} + Ar_{eq} = 0$$

de maneira que:

$$r_{eq}^4 = (l_z^2/mA)$$

Em seguida, procedemos para encontrar a frequência de pequenas oscilações:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m} \frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} \Big|_{r=r_{eq}}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} V_{eff} = \frac{3l_z^2}{mr^4} + A$$

que calculamos para $r = r_{eq}$:

$$\frac{d^2}{dr^2} V_{eff} \Big|_{r=r_{eq}} = 3A + A = 4A$$

Ou ainda:

$$\omega_0^2 = \frac{4A}{m}$$

Esta frequência descreve a oscilação da coordenada r . Ou seja, o período $2\pi/\omega_0$ é o tempo necessário para a massa, digamos, sair de r_{max} , ir até r_{min} e retornar para r_{max} . Vamos agora calcular a frequência de revolução. Ou seja, a frequência associada a partícula completar uma volta em torno do centro da força. Sabemos que para o movimento circular, temos:

$$\dot{\phi}_0 = l_z^2/mr_0^2$$

Adotamos como aproximação que, como falamos de pequenas oscilações, $\dot{\phi}$ para o caso acima é aproximadamente $\dot{\phi}_0$. Neste caso temos:

$$\dot{\phi}_0^2 = A/m$$

Note, portanto, que $\omega_0 \neq \dot{\phi}_0$. De fato:

$$\frac{\omega_0}{\dot{\phi}_0} = 2$$

Ou seja, para cada revolução existem duas oscilações da coordenada r .

Sistema de duas partículas

Para formular o problema de dois corpos, relembramos que $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ e $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$ são quantidades conservadas. A conservação de $\vec{P}$, nos permite considerar a posição do centro de massa, $\vec{R}_{cm}$, como um referencial inercial. Como já vimos, é muito útil adotar este referencial como origem do sistema de coordenadas e escrevemos a energia total do sistema em termos da posição e velocidade relativa. Consideramos brevemente este desenvolvimento para refrescar a memória.

Primeiro, escrevemos as relações usuais para os vetores posição e velocidade das partículas 1 e 2 e os vetores velocidade e posição relativa:

$$\begin{cases} \vec{R}_{cm} &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases}$$

Resolvemos o sistema para encontrar $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ e lembramos que adotamos o CM como origem do sistema de coordenadas ($\vec{R}_{cm} = 0$):

$$\begin{cases} \vec{r}_1 &= \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= - \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{cases}$$

De maneira que:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 &= \frac{m_2}{M} \vec{v} \\ \vec{v}_2 &= - \frac{m_1}{M} \vec{v} \end{cases}$$

Estas expressões são usadas para reescrever a expressão para E :

$$E = \frac{m_1}{2} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 + U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Em termos apenas da posição e velocidade relativa:

$$E = \frac{\mu}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + U(\vec{r})$$

Nesta expressão: $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ é a massa reduzida do sistema. Agora nos voltamos para as consequência da conservação de $\vec{L}$ no contexto de forças centrais o que nos permite escrever $U(\vec{r}) = U(r)$ e sabemos que podemos adotar coordenadas polares:

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\mu}{2} r^2 \dot{\phi}^2 + U(r)$$

Mas há uma quantidade L_z tal que $L_z = \mu r^2 \dot{\phi}$ é conservada? E qual sua interpretação? Para o caso de 1 partícula, para o qual $\mu = m$, trata-se da componente z do momento angular do corpo que

constitui o sistema. Mas qual a interpretação para o presente caso? Para chegar na resposta, avaliamos o momento angular total do sistema:

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2$$

Substituindo a expressão para $\vec{v}$, temos:

$$\begin{aligned} &= \vec{r}_1 \times m_1 \left(\frac{m_2}{M} \vec{v} \right) + \vec{r}_2 \times m_2 \left(-\frac{m_1}{M} \vec{v} \right) \\ &= \mu \vec{r} \times \vec{v} = \mu r^2 \dot{\phi} \end{aligned}$$

Ou seja, $L_z = \mu r^2 \dot{\phi}$ é a componente z do momento angular total do sistema. Desta maneira, escrevemos a seguinte expressão para a energia total:

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

ou ainda:

$$\begin{cases} E &= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{eff}(r) \\ V_{eff}(r) &= \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + U(r) \end{cases}$$

Ou seja, as conclusões e métodos enunciados nesta nota para o caso de 1 partícula permanecem essencialmente válidos: basta considerarmos $m \rightarrow \mu$ em todas expressões. Como exemplo, ω_0^2 que escreve:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\mu} \frac{d^2 V_{eff}(r)}{dr^2} \Big|_{r=r_{eq}}$$

Interpretação

Para além da questão pragmática do calculo de $\dot{\phi}_0$ e ω_0 , é importante ainda entender o que mais se modifica para o caso de 2 partículas. O primeiro passo é reconhecer que o valor de r_{eq} é a distância entre as duas partículas. O valor de $\dot{\phi}_0$ é a taxa na qual a linha que conecta as duas partículas completa o círculo. Cada partícula está em MCU ao redor do CM, mas com raios distintos. Considerando $m_2 > m_1$ (apenas para efeito do argumento), esperamos que o CM esteja mais próximo a m_2 . De fato, note que o raios do MCU se escrevem:

$$\begin{cases} r_1 &= \frac{m_2}{\mu} r_{eq} \\ r_2 &= \frac{m_1}{\mu} r_{eq} \end{cases}$$

Quando consideramos pequenas oscilações, mais uma vez estamos a discutir variações da distância entre duas partículas. Note que ambas as partículas se afastam e se aproximam do CM com uma fase contrária. De fato, este é um tipo de oscilação acoplada, como um sistema de duas massas conectadas por uma única mola.