

# Capítulo 1

## Teoremas de conservação e sistemas de 1 partícula

Diferente de resolver mais problemas particulares, vamos tentar entender que consequências gerais podemos extrair das leis de Newton para o estudo da dinâmica clássica de um sistema de partículas. Este é nosso programa para esta e a próxima aula. Iremos explorar a conservação de três quantidades centrais no estudo da dinâmica clássica: o momento linear, a energia e o momento angular. Nosso objetivo com este estudo é formular métodos para a investigação do comportamento qualitativo e quantitativo de sistemas mecânicos, muitas vezes sem a necessidade de resolver as equações de movimento.

Mas primeiro é interessante explicarmos o que queremos dizer quando falamos que uma determinada quantidade, por exemplo a quantidade  $C$ , é conservada com o tempo. Estamos querendo dizer que em qualquer tempo  $t$ , a quantidade  $C$  terá o mesmo valor. Expressamos matematicamente esta afirmação da seguinte maneira:

$$\dot{C} = 0$$

Note que no caso de vetores, esta é uma afirmação que se estende não apenas ao módulo do vetor, mas também à sua direção. Mas como chegar à conclusão que uma determinada quantidade é conservada? Vimos exemplos para os quais esta conclusão pode ser extraída diretamente do vetor posição de uma partícula. Mas isso significa que a solução do problema já é conhecida o que torna nossa conclusão uma mera curiosidade. Felizmente, leis de conservação manifestam-se nas equações de movimento, sem que as mesmas precisem ser resolvidas. Considere uma partícula sob ação de uma força central:

$$\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$$

A segunda lei de Newton neste caso escreve-se:

$$\begin{cases} \sum F_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \\ \sum F_\phi &= m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \end{cases}$$
$$\begin{cases} f(r) &= m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \\ 0 &= m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \end{cases}$$

Observando a segunda linha da equação, podemos reconhecer uma derivada total. Note que:

$$m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi})$$

Mas sabemos que  $m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$ , e podemos concluir que:

$$0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi})$$

Ou ainda que:

$$mr^2\dot{\phi} = C$$

onde  $C$  é uma constante. Neste caso,  $C$  é a componente  $z$  do momento angular em relação ao centro da força  $l_z$ . Podemos aplicar este resultado à equação:

$$f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)$$

que agora escreve-se:

$$f(r) = m(\ddot{r} - r(\frac{l_z^2}{mr^2})^2)$$

ou seja, o problema é agora, efetivamente, um problema 1D. Portanto, enorme simplificação foi obtida por análise da conservação da quantidade  $C = l_z$ . O que faremos é investigar as condições gerais para as quais simplificações deste tipo estão disponíveis.

## 1.1 Energia potencial

A energia mecânica de um sistema de 1 partícula é, estritamente falando, definida apenas como a energia cinética da partícula. Neste caso:

$$E = K = \frac{m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}$$

O teorema trabalho - energia cinética nos diz que:

$$W = \Delta K$$

onde  $W$  é o trabalho realizado pela resultante de forças do sistema. Portanto, para que a energia conserve-se é necessário que:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Neste caso,  $\mathbf{F} = 0$  ou  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  igual à 0. Note que o primeiro caso é trivial. Já o segundo, inclui a dinâmica de uma partícula sob ação da força magnética que, como já trabalhado em problema da lista, está longe de ser um problema trivial. No entanto, podemos definir uma *constante do movimento* de enorme utilidade para o tipo de análise que queremos desenvolver nesta aula. Para tal, lembro aqui um resultado do cálculo vetorial. Vamos estudar a integral de um gradiente. Consideremos o seguinte teorema, válido sob algumas hipóteses:

$$\phi_B - \phi_A = \int_A^B \nabla \phi \cdot d\mathbf{s}$$

Ou seja: a integral de um gradiente depende apenas dos valores da função no extremo, sem qualquer referência à trajetória particular a ser considerada. A prova, é como se segue: Supomos uma trajetória qualquer  $\gamma(t)$ , de maneira que:  $\phi_A = \gamma(t_A)$  e  $\phi_B = \gamma(t_B)$ . Agora, voltamos para a integral:

$$\int_A^B \nabla \phi \cdot d\mathbf{s} = \int_{t_A}^{t_B} \nabla \phi[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t) dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} [\phi(\gamma(t))] dt = \phi(\gamma(t)) \Big|_{t_A}^{t_B} = \phi_B - \phi_A$$

De posse deste resultado, calculamos o trabalho de uma força  $\mathbf{F}$  entre pontos  $A$  e  $B$ . Mas não se trata de uma força  $\mathbf{F}$  qualquer, mas sim de uma força  $\mathbf{F}$  que, por hipótese, pode ser derivada de um gradiente  $\mathbf{F} = -\nabla \phi$ . Neste caso:

$$W_A^B = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B -\nabla \phi \cdot d\mathbf{s} = \phi_A - \phi_B$$

Note, no entanto, que temos uma outra expressão para o trabalho desta força, que é deduzida pelo teorema trabalho energia cinética:  $= T_B - T_A$ . Desta maneira:

$$T_B - T_A = \phi_A - \phi_B$$

ou ainda:

$$T_A + \phi_A = T_B + \phi_B$$

Ou seja para forças do tipo  $\mathbf{F} = -\nabla \phi$ , existe uma quantidade  $T + \phi$ , calculada em um determinado ponto do espaço que permanece contante ao longo do movimento. Note que  $\phi$  é um função da posição que chamaremos energia potencial. Vamos denotar esta quantidade pela letra  $U$ . Para definir a função  $U(r)$ , consideramos o trabalho de  $\mathbf{F}$  para quando a partícula desloca-se de um ponto  $\mathbf{r}_0$  ate  $\mathbf{r}$  arbitrário, desta maneira:

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -[U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0)]$$

Onde omitimos  $\Gamma$  pois sabemos que esta integral não depende da trajetória. Arbitrariamente, definimos que  $\mathbf{r}_0$  é o ponto no qual  $U = 0$ . Desta maneira podemos definir a seguinte função  $U(\mathbf{r})$ :

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -U(\mathbf{r})$$

Perceba que nessa definição a força é o elemento fundamental da dinâmica: a energia potencial é definida em termos de uma força. É extremamente importante entender que nem toda força admite uma energia potencial. Como saber se uma força admite uma energia potencial? Ora, sabemos que  $\nabla \times \nabla \phi = 0$ . Ou seja, se  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ , então  $\mathbf{F}$  admite uma energia potencial. Trata-se de uma condição necessária e suficiente. Começamos a seção também com a hipótese que  $\mathbf{F}$  não depende do tempo. Perceba que  $\mathbf{F}$  pode depender explicitamente de  $t$  e ainda sim  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ . Neste caso, perceba que  $U = U(\mathbf{r}, t)$ .

## 1.2 Definindo a função $h$

Agora que entendemos o que queremos dizer por energia potencial, estamos prontos para definir uma importante quantidade dinâmica, que denotaremos função energia  $h$ . Esta quantidade escreve-se:

$$h = T + U = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U(\mathbf{r}, t)$$

Agora, podemos investigar sob que condições  $h$  se conserva. Vamos considerar a derivada temporal desta expressão:

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{d}{dt} U \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{1}{2} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \nabla U \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}\end{aligned}$$

Nossa primeira condição é que  $U$  não possui dependência explícita com  $t$ . Reconhecemos também a segunda lei de Newton e, portanto, temos:

$$= \left( \sum \mathbf{F} + \nabla U \right) \cdot \mathbf{v}$$

O termo  $\sum \mathbf{F}$  (a resultante de forças) pode se dividir em duas expressões:  $\sum \mathbf{F} = \sum \mathbf{f} + (-\nabla U)$ , ou seja, um corpo pode estar sob ação de forças deriváveis de potenciais e forças não deriváveis de potenciais (exemplo: forças de resistência e força peso, respectivamente). Desta maneira:

$$= \sum \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

Portanto, quando (1)  $U$  não depende explicitamente do tempo e quando (2) todas as forças que atuam sobre uma partícula são deriváveis de um potencial, temos que a função  $h$  para o sistema de 1 partícula se conserva. Forças como  $\mathbf{F}$  são ditas conservativas e forças como  $\mathbf{f}$  são ditas não conservativas. Perceba que temos outro ponto importante: a taxa de variação da energia, na presença de forças não conservativas, se escreve:  $\sum \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ , que conhecemos como potência. Forças não conservativas podem tanto aumentar quanto diminuir a energia mecânica de partícula.

Aqui cabe uma importante digressão: o mais comum é que o que estamos chamando de função  $h$  seja entendido em muitos textos como a energia mecânica total  $E$  do sistema de 1 partícula. O termo, no entanto, não é totalmente adequado. A energia potencial tem origem na interação entre partículas e é estranho que a energia mecânica de um sistema de 1 partícula não ser definida em termos de quantidades que dependem de mais de uma partícula. Trata-se de uma terminologia confusa. Como então resolver a questão? O usual é utilizarmos o termo de maneira solta e sem nos preocuparmos com esta questão. Rigorosamente, o que está por trás desta aparente displicência é que quando estamos interessados na dinâmica de 1 partícula e escrevemos  $E = T + U$  o que queremos dizer é que o restante do sistema, ao longo de toda duração da dinâmica da partícula de interesse, permanece essencialmente em repouso. Tendo isto em mente, podemos de maneira não muito rigorosa usar a ideia que  $E = T + U$ . Manterei ao longo do texto, no entanto, a terminologia acima adotada: falarei sempre sobre uma função  $h$ , que chamarei de *função energia*.

### 1.2.1 Estrutura topológica

Existe um detalhe muito importante a ser considerado. Somos tentados a concluir que se  $\vec{F}$  não depende do tempo e se  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ , então  $\vec{F}$  é uma força conservativa. Embora esteja anotado em diversos livros desta maneira, infelizmente isso não é verdade, e contra exemplos importantes existem. De um ponto de vista matemático, este ponto foi abordado na lista 1 de exercícios. Vamos analisar de perto o que este fato significa.

Suponha que a partícula faz uma trajetória fechada, indo da posição  $r_A$  até de volta a  $r_A$ . A priori, podemos nos perguntar sobre a variação da energia total  $E$  para este movimento. Suponha que todas

as forças sobre a partícula sejam derivadas de um potencial. Calculando o trabalho da força resultante sobre a partícula:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}_R \cdot d\vec{s} = T'_A - T_A$$

Se  $\vec{F}_R = -\sum \vec{\nabla}U$ , sabemos que o lado da esquerda se compara com  $U_A - U_A = 0$ . Portanto, a energia cinética também não varia e então podemos concluir que  $\Delta E = 0$ . No entanto, a integral  $\oint_{\Gamma} \vec{F}_R \cdot d\vec{s}$  tem uma *estrutura topológica* não trivial. De fato, o que diremos é o seguinte: se o trabalho de  $\vec{F}$  independe do caminho, então  $\vec{F}$  é conservativa. Para maior parte dos casos, basta verificar se  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ , mas não se trata de um critério geral. Ou seja, o critério  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  é uma condição necessária, mas não suficiente para defirmos forças conservativas. Para entender um pouco melhor estas questões, discutiremos brevemente o caso 2D e adotaremos coordenadas cartesianas para fixar ideias.

Antes, precisamos entender o seguinte: dado uma função contínua  $\phi(x, y, z)$ , temos para as derivadas parciais:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y \partial x}$$

Este resultado é equivalente a escrever o seguinte:  $\nabla \times \nabla \phi = 0$ . Por exemplo, para o componente  $\hat{i}$  do rotacional de  $\nabla \phi$  temos:

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z \partial y} \right)$$

que é 0 sempre uma vez que  $\phi$  é diferenciável. Suponha agora um campo de forças 2D, de maneira que:

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$$

Se o conjunto  $S$  onde o campo vetorial  $\vec{F}$  é definido for *simplesmente conexo*, temos que a integral deste campo ao longo do caminho  $\Gamma$  se escreve:

$$\oint_{\Gamma} (P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}) \cdot d\vec{s} = \int \int [\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y)] dx dy$$

para  $\vec{F}$  um gradiente, esta integral é 0 para qualquer  $\Gamma$ . No entanto, se  $S$  não for simplesmente conexo, precisamos olhar todas as singularidades em  $S$ . De fato:

$$\oint_{\Gamma} (P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}) \cdot d\vec{s} + \sum_k \oint_{\Gamma_k} (P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}) \cdot d\vec{s} = \int \int [\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y)] dx dy$$

onde as curvas circulam em torno da singularidade. Um resultado importante, é que a integral em torno de uma singularidade, não depende de  $\Gamma$ , e podemos usar a curva mais simples para o cálculo da integral.

### 1.3 Método da energia

Vamos entender as consequências para a dinâmica de uma partícula que podem ser deduzidas a partir da conservação da função energia. Neste caso, a função  $h$  é dita uma constante do movimento. Neste primeiro momento, vamos restringir nossa análise a um sistema 1D. Em uma dimensão, e apenas em

uma dimensão, a condição suficiente para forças conservativas é que as forças devem depender apenas da posição (e não serem singulares na reta). Vamos ainda tomar que conhecemos o potencial  $U(x)$ . A força, será tida como a derivada de  $U(x)$ ,  $\mathbf{F} = -dU(x)/dx\hat{i}$ . Desta maneira, a função energia de uma partícula de mass  $m$  se escreve:

$$h = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

Podemos resolver esta equação para encontrar  $\dot{x}$ :

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(h - U(x))}$$

Esta expressão é usualmente chamada primeira integral do movimento, em referência ao fato que obtemos a velocidade da partícula sem a necessidade de integrar a segunda lei de Newton. Perceba que  $x(t)$  pode ser encontrada integrando esta equação (as condições iniciais determinam o valor de  $h$ ).

Um vez que  $\dot{x}$  deve ser um número real, a expressão nos mostra que apenas os casos para os quais a função energia da partícula  $h$  é maior que  $U(x)$  é que a dinâmica da partícula é possível. Para o caso no qual  $U(x)$  é limitado, a Eq. também nos mostra a região na reta á qual a dinâmica está restrita (pense em um poço de energia).

Informações qualitativas sobre a dinâmica da partícula podem, portanto, ser obtidas por meio de um diagrama de energia. Neste caso, fazemos um gráfico de  $U(x)$  e consideramos um valor partícula para  $h$  (que é constante). As regiões da reta acessíveis para a partícula são aquelas para as quais  $h \geq U(x)$ . Ao interpretar esses diagramas de energia, devemos ter cuidado para não tomar a interpretação de maneira tão literal. Devemos notar que a dinâmica se dá na reta, sem subidas e descidas ao sabor do gráfico de  $U(x)$ .

Seguem algumas definições referentes a situação de interesse: temos os chamados pontos de equilíbrio, sendo estes estáveis ou instáveis. Próximo a pontos estáveis, a dinâmica é tal que a partícula tende a retornar para o ponto de equilíbrio, e a trajetoria da dinâmica se dá em um região limitada. Próximo a pontos instáveis, o oposto ocorre, embora órbitas fechadas ainda podem ocorrer. Qualquer que seja a forma de  $U(x)$  (desde que o mesmo possua derivadas), na proximidade do ponto de equilíbrio, podemos expandi-lo em séries de Taylor.

$$U(x) = U(x_{eq}) + (x - x_{eq})\left(\frac{dU}{dx}\right)|_{x=x_{eq}} + \frac{1}{2}(x - x_{eq})^2\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)|_{x=x_{eq}} + \dots$$

Próximo a um ponto de equilíbrio, a primeira derivada é igual a 0, e apenas os termos de ordem superior  $\mathcal{O} > 1$ , contribuem para o potencial. Para pequenos deslocamentos, podemos ficar apenas com os termos em  $(x - x_{eq})^2$ . Desta maneira:

$$U(x) \approx U(x_{eq}) + \frac{1}{2}(x - x_{eq})^2\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)|_{x=x_{eq}}$$

Fica claro que a estabilidade do ponto de equilíbrio é, portanto, dado pelo sinal da segunda derivada de  $U(x)$  avaliada em  $x_{eq}$ . Perceba que isso é um número, que chamaremos  $k$ , que depende dos parâmetros físicos que determinam a energia potencial  $U(x)$ :

$$k = \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)|_{x=x_{eq}}$$

Se calcularmos a dinâmica da partícula nessa aproximação, temos o seguinte:

$$\mathbf{F}(x) = -(x - x_{eq})\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)|_{x=x_{eq}}\hat{i}$$

Que pode ser escrita em uma forma muito particular:

$$\mathbf{F}(x) = -(x - x_{eq})k\hat{i}$$

Sabemos exatamente qual o tipo de dinâmica associada a esta força: trata-se de um oscilador harmônico, que veremos em detalhes nas próximas aulas. A função posição da partícula nas proximidades de  $x_0$  se escreve:

$$x(t) - x_{eq} = A \cos(\omega_0 t - \delta)$$

As constantes  $A$  e  $\delta$  estão ligadas às condições iniciais do problema e  $\omega_0 = k/m$  guarda a informação sobre o potencial original.

### 1.3.1 Exemplo

Considere  $x > 0$  e analise a dinâmica de uma partícula de massa  $m$ , cuja energia potencial se escreve:

$$U(x) = \frac{a}{x} + x$$

*Tarefa:* em aula, estudaremos este exemplo em detalhes. Você deve a) fazer um esboço do gráfico; b) por meio do esboço, inferir pontos de equilíbrio estáveis e/ou instáveis; c) analisar as frequência de pequenas oscilações em torno de pontos de equilíbrio estáveis.

## 1.4 Conservação do momento e do momento angular

O caso da conservação do momento linear  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  de um sistema de 1 partícula não traz dificuldade. De fato, uma vez que  $d\mathbf{p}/dt = \sum \mathbf{F}$ , sabemos que se  $\sum \mathbf{F} = 0$ , então  $\mathbf{p}$  é conservado. A principal tarefa desta seção, portanto, é estudar a conservação do momento angular de um sistema de 1 partícula. O momento angular de uma partícula com vetor posição  $\mathbf{r}$  e momento  $\mathbf{p}$  escreve-se:

$$\mathbf{l} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Notemos que o momento angular é sempre calculado em relação a um ponto  $O$  e depende da posição da origem do sistema de coordenadas e por vezes é importante lembrar esta questão, escrevendo explicitamente:

$$\mathbf{l}_O \equiv \mathbf{r}_O \times \mathbf{p}$$

No que segue, vamos eliminar o subscrito  $O$ , sem nunca nos esquecer que “ele está lá”. Para estudar a conservação de  $\mathbf{l}$ , calculamos sua derivada em relação a  $t$ :

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \sum \mathbf{F}$$

O termo  $\mathbf{r} \times \sum \mathbf{F}$  é conhecido como o torque da força resultante. Denotaremos  $\mathbf{N}$  como o torque de uma força (resultante ou não). Note que assim como no caso de  $\mathbf{l}$ , temos que o torque de uma força  $\mathbf{F}$  é explicitamente escrito como:  $\mathbf{N}_O = \mathbf{r}_O \times \mathbf{F}$ : ou seja, torques também são calculados em relação a um ponto. Nesta expressão, temos também o termo  $\mathbf{v} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$ . Desta maneira:

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{N}$$

Ou seja, se  $\mathbf{N} = 0$ , temos que  $\mathbf{l}$  é conservada. Claramente, devemos comparar torques e o momento angular calculados em relação à um mesmo ponto  $O$ . Note que uma vez que a variação do momento

angular é devido a torques,  $\mathbf{l}$  pode se conservar mesmo na presença de forças externas, desde que o torque resultante devido estas forças seja nulo.

### 1.4.1 Forças centrais e momento angular

As consequências para a dinâmica referentes a conservação de  $\mathbf{l}$  são muito bem ilustradas pelo exemplo das forças centrais. Ao longo do curso, nosso conhecimento sobre as forças centrais será aprofundado sempre tendo como referência os teoremas de conservação. Nosso objetivo neste momento é definir nosso objeto de estudos e tirar algumas conclusões iniciais sobre este problema bastante geral. Primeiro, vamos esclarecer nosso objeto de estudo e para isto relembramos o que é uma força central. Trata-se de uma uma força do tipo:

$$\mathbf{F} = \hat{r}f(r)$$

onde, a priori,  $r$  e  $\hat{r}$  denotam de coordenadas esféricas. Uma vez que  $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ , o momento angular em relação ao centro da força (que aqui coincide com a origem do sistema de coordenadas) é conservado. Quais são as consequências mais imediatas deste resultado para a dinâmica da partícula? Diretamente da definição  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , vemos que  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$  definem necessariamente um plano de inclinação fixa! Porque? Uma vez que  $\mathbf{l}$  é um vetor, não apenas seu módulo, mas também sua direção, é conservada! A conservação de  $\mathbf{l}$ , portanto, tem uma importante consequência geométrica: o movimento devido a uma força central se dá exclusivamente em um plano.

Note que a conservação do momento angular nos permite tratar este problema 3D, como um problema 2D, diminuindo a quantidade de equações a serem resolvidas. Sem perda de generalidade, podemos considerar o plano da dinâmica como o plano  $xy$  e escrever o momento angular como  $\mathbf{l} = mr^2\dot{\phi}\hat{k} = l_z\hat{k}$ , que está ao longo do eixo que contém a direção  $\hat{k}$ . A dinâmica da partícula, portanto, é bem bem descrita por coordenadas polares coordenadas polares  $(r, \phi)$ .

### 1.4.2 Equação do movimento

Como vimos no início da aula, podemos escrever para forças centrais que:

$$f(r) = m(\ddot{r} - r(\frac{l_z^2}{mr^2})^2)$$

agora, sabemos que esta expressão é uma consequência da conservação do momento angular, uma vez que o torque devido a força central é nulo. Dado esta expressão podemos, por exemplo, no perguntar sobre a existência de movimento circular de raio  $r = a$  para  $f(r)$ . Neste caso, podemos impor à equação de movimento que  $\ddot{r} = 0$  e assim devemos analisar se:

$$f(r) = -\frac{l_z^2}{mr^3}|_{r=a}$$

admite uma solução fisicamente aceitável. Qual o significado de “fisicamente aceitável” neste contexto? Neste contexto, basta que  $a$  sera real.

## 1.5 Método da energia para a força central

O problema é bastante mais interessante quando o olhamos do ponto de vista do método da energia. Para desenvolver este método, procuramos a função  $h$  para uma partícula sujeita à uma força central. Neste caso, definimos inicialmente a energia potencial:

$$U(r) = \int_{r_0}^r f(r) dr$$

onde  $r_0$  é o ponto no qual  $U(r_0)$  é 0. Como exemplo, considere  $\mathbf{F}$ . Efetuando a integração, temos:

$$U(r) = -\frac{k}{r} \Big|_{r_0}^r = -\frac{k}{r} + \frac{k}{r_0}$$

notemos que neste caso  $r_0 \rightarrow \infty$  é a referência correta, e temos:

$$U(r) = -\frac{k}{r}$$

Podemos agora escrever:

$$h = \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U(r)$$

A conservação de  $\vec{l}$ , implica que a dinâmica de  $m$  está restrita a um plano, definido pelos vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$ . Podemos adotar que este é o plano  $xy$  e ainda descrever a dinâmica da partícula por meio de coordenadas polares. Portanto,  $\vec{l} = mr^2 \dot{\phi} \hat{k}$  é conservado ou ainda  $l_z = mr^2 \dot{\phi}$  é conservado. Estas considerações são utilizadas para trabalhar a expressão para a energia e escrevemos:

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} + U(r)$$

que depende apenas da coordenada  $r$  e sua derivada  $\dot{r}$ .

### 1.5.1 Energia potencial efetiva

Comparemos, de um ponto de vista formal, a expressão acima para  $E$  com a expressão para um sistema 1D, que reproduzimos abaixo:

$$h = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x)$$

Perceba que existe uma certa equivalência: a energia, em ambos os casos, depende apenas de uma única coordenada e sua derivada! Esta observação motiva a seguinte definição:

$$V_{eff}(r) = \frac{l_z^2}{2mr^2} + U(r)$$

Que denominamos energia potencial efetiva. Note que o termo:

$$\frac{l_z^2}{2mr^2}$$

é uma fração da energia cinética e que apenas  $U(r)$  é uma energia potencial “legítima”. Porque esta definição é importante? Para o caso 1D, podemos isolar  $\dot{x}$  e obter a chamada primeira integral do movimento:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m} [h - U(x)]}$$

É nessa expressão na qual baseamos os argumentos para desenvolver o chamado método da energia. No presente caso, considerando a definição para  $V_{eff}$ , escrevemos:

$$h = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

Ou ainda:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}[h - V_{eff}(r)]}$$

Que nos permite analisar a dinâmica da coordenada  $r$  da mesma maneira que antes analisamos a dinâmica da coordenada  $x$ . Deve-se apreciar que por aplicação dos teoremas de conservação tivemos sucesso em transformar um problema 3D, que envolve 3 coordenadas, em um problema efetivo que envolve apenas uma única coordenada.

### 1.5.2 Consequências para a dinâmica

Se consideramos um diagrama de energia no qual traçamos um gráfico de  $V_{eff}(r)$  e valor da função energia  $h$ , podemos determinar extremos da dinâmica do sistema, observando a existência de  $r_{max}$  e  $r_{min}$ , assim como a existência de um “ponto de equilíbrio”  $r_{eq}$ . As aspas se fazem necessárias para lembrarmos que tratamos neste momento uma descrição efetiva, e não um sistema 1D autêntico. A interpretação destes “pontos especiais” do diagrama de energia é bem distinta. Para entender esta questão, analisamos a dinâmica de pequenas oscilações em torno de  $r_{eq}$ . Nesta situação, queremos:

$$V_{eff}(r) = V_{eff}(r_0) + \frac{dV_{eff}}{dr}\Big|_{r=r_{eq}}(r - r_{eq}) + \frac{1}{2} \frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\Big|_{r=r_{eq}}(r - r_{eq})^2 + \dots$$

Considerando que expandimos em torno de um ponto de equilíbrio, temos:

$$\frac{dV_{eff}}{dr}\Big|_{r=r_{eq}} = 0$$

Usando a definição para  $V_{eff}(r)$  temos:

$$\frac{dV_{eff}}{dr}\Big|_{r=r_{eq}} = -\frac{l_z^2}{mr_{eq}^3} + \frac{dU(r)}{dr}\Big|_{r_{eq}} = 0$$

Note que a força do problema, é apenas o termo:

$$\frac{dU(r)}{dr} \neq 0$$

Portanto,  $r_{eq}$  não é um ponto de equilíbrio no sentido usual. De fato, há uma força resultante sobre o sistema. Mas note que durante toda a dinâmica pode-se escrever que o vetor posição de  $m$  é  $\vec{r} = r_{eq}\hat{r}$ . Este é o vetor posição de uma trajetória circular de raio  $r_{eq}$ . E mais, retomando a expressão para  $l_z$ , perceba que:

$$\dot{\phi} = \frac{l_z}{mr_{eq}^2} = \text{constante}$$

Denotamos este valor  $\dot{\phi}_0$ . Ou seja, a partícula está em movimento circular uniforme. Mas há um outro resultado importante. Note que a frequência oscilações em torno do raio de equilíbrio pode ser calculada como:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m} \frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\Big|_{r=r_{eq}}$$

Note que existem duas frequência no problema. Uma é devido a  $\dot{\phi}_0$  é a frequência de revolução. Já a frequência  $\omega_0$  é devido a oscilação da coordenada  $r$ .

## 1.6 Sumário e conclusões

Concluimos a aula notando que os teoremas de conservação permitem simplificações importantes para o estudo da dinâmica de um partícula. Talvez, o mais interessante resultado desta aula foi nossa abordagem do problema de forças centrais. O chamado método da energia, desenvolvido em termos da função energia  $h$ , nos permite tirar conclusões qualitativas e quantitativas sobre o sistema que são bastante gerais e relevantes.

## Capítulo 2

# Teoremas de conservação para sistemas de 2 e $N$ partículas

Nesta segunda aula sobre os teoremas de conservação, consideramos sistemas de 2 e  $N$  partículas. As quantidades a serem estudadas continuam sendo a energia, o momento e o momento angular destas sistemas. Seguiremos de perto o programa da aula passada: primeiro definimos as quantidades de interesse, em seguida estudamos as condições para sua conservação e, finalmente, avaliamos as consequência para a dinâmica que podemos extrair dos resultados.

### 2.1 Momento linear

O estudo da conservação do momento linear, tem consequências mais importantes quando consideramos um sistema de  $N$  partículas. Como definimos, o momento linear de uma única partícula, com massa  $m_i$  e velocidade  $\vec{v}_i$ , se escreve  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ . Definimos o momento linear total do sistema de partículas como a soma de cada um destes momentos:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$$

Certamente que a variação do momento linear total do sistema se escreve da seguinte forma:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \vec{p}_i$$

Cada partícula do sistema está sob ação de forças das demais partículas e eventuais forças externas. Assim:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_j \vec{F}_{i(j)} + \sum_i \vec{F}_i^e$$

Desta maneira:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i \neq j} \sum_j \vec{F}_{i(j)} + \sum_i \vec{F}_i^e = \sum_i \vec{F}_i^e$$

Onde consideramos a terceira lei de Newton ( $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ ) na última igualdade. Desta maneira, o momento total do sistema é constante quando a soma das *forças externas* é 0. Observe que mesmo

nessa situação o momento de cada partícula do sistema não é constante, pois cada partícula está sob ação de uma enorme quantidade de forças. Outro ponto importante pode ser afirmado: Uma vez que  $\vec{v}_i = (d/dt)\vec{r}_i$ , podemos reescrever esta equação da seguinte forma (para  $M$  total constante):

$$\vec{P} = \sum_i \frac{d}{dt} m_i \vec{r}_i = \sum_i M \frac{d}{dt} \left( \frac{m_i \vec{r}_i}{M} \right)$$

Onde  $M$  é a massa total de todas as partículas do sistema. Reconhecemos o termo entre parentesis como a posição do centro de massa, portanto sua derivada é a velocidade do centro de massa:  $\vec{V}_{cm}$ . Desta maneira:

$$\vec{P} = M\vec{V}_{CM}$$

Ou seja, o momento do sistema pode ser escrito como a massa total multiplicada pela velocidade do centro de massa. Ainda podemos concluir que:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}^e$$

Ou seja, um sistema de partículas se comporta de uma maneira tal que as forças externas atuam sobre uma partícula de massa  $M$  na posição do CM. Um resultado também muito importante é o seguinte. Para o caso no qual  $\sum \vec{F}^e = 0$ , podemos considerar a origem no CM. Se usamos o CM como referencial,  $\vec{V}_{CM} = 0$ , ou seja:

$$\vec{P}^{CM} = 0$$

O momento linear de um sistema de partículas medido a partir do CM é nulo!

### 2.1.1 Sistemas de dois corpos

Um exemplo muito importante do acima exposto é oferecido pelo estudo de um sistema de contém dois corpos que interagem por meio de forças newtonianas. Observa que temos  $\vec{p}_1$  e  $\vec{p}_2$ , de maneira que:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

Considerando a variação de  $\vec{P}$ , temos:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{1(2)} + \vec{F}_{2(1)} = 0$$

Um resultado esperado, uma vez que o sistema é isolado. Note, no entanto, que o  $\vec{p}$  de cada uma das partículas varia. O que permanece constante é  $\vec{P}$ . Nesta situação, na ausência de forças externas, podemos usar o CM como referencial e origem para o sistema de coordenadas, o que nos leva a uma importante simplificação do problema. Para tal, considere o vetor posição relativa entre estas partículas e posição do CM:

$$\begin{cases} \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{R}_{CM} &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Tomando o CM como origem do sistema, temos:

$$\begin{cases} \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ 0 &= m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 \end{cases}$$

Ou ainda:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1 = \frac{(m_1 + m_2)}{m_2} \vec{r}_1$$

Derivando duas vezes, temos:

$$\vec{a} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{a}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_{1(2)}$$

onde  $\vec{a}$  é a derivada segunda do vetor posição relativa. Esta equação pode ser arranjada da seguinte maneira:

$$\mu \vec{a} = \vec{F}_{1(2)}$$

onde definimos a massa reduzida  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ . Perceba a importante conclusão a que chegamos. Para um sistema de dois corpos, nos é permitido estudar a dinâmica apenas da coordenada relativa, desde que utilizemos o conceito de massa reduzida. Ou seja, efetivamente, precisamos resolver apenas o problema de um único corpo. Depois, usamos relações vetoriais para encontrar a dinâmica de cada corpo separadamente.

## 2.2 Energia de um sistema de 2 e $N$ partículas

Para avaliarmos a energia do sistema, é bastante importante olharmos as definições para as energias cinética e potencial e vermos como que estas definições podem ser adaptadas para o caso de duas, ou  $N$ , partículas. Para a energia cinética escrevemos diretamente a seguinte expressão:

$$T = T_1 + T_2$$

Já a energia potencial requer um desenvolvimento um pouco maior. Primeiro, nos restringimos a avaliar apenas forças que depende da distância entre duas partículas. Desta maneira,  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  e também  $U = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ . A força sobre a partícula 1 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\vec{F}_{1(2)} = -\nabla_1 U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Mas, evocando a terceira lei de Newton, temos que:

$$\vec{F}_{2(1)} = -\vec{F}_{1(2)} = \nabla_1 U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Note ainda que temos o seguinte:

$$\nabla_1 U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\nabla_2 U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Portanto, para um sistema de duas partículas, precisamos que uma única função energia potencial para determinar as forças agindo sobre cada partícula. É errado portanto, escrever que a energia potencial seria composta de dois termos do tipo:

$$U = U_{12} + U_{21} = \text{errado}$$

Para demonstrar esta questão de maneira mais rigorosa, lembramos que a energia cinética das duas partículas se escreve:

$$T = T_1 + T_2$$

A variação de  $T$ , portanto, se escreve:

$$dT = dT_1 + dT_2$$

Evocando o teorema trabalho energia cinética temos:

$$= \vec{F}_{1(2)} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{2(1)} \cdot d\vec{r}_2$$

Usando a terceira lei de Newton:

$$= \vec{F}_{1(2)} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\nabla_1 U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Trocando variáveis  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , temos:

$$-\nabla_1 U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\nabla U(\vec{r}) \cdot d(\vec{r})$$

(note que  $\nabla_1 = \nabla$ ). Temos portanto que:

$$dT = -dU$$

Ou ainda:

$$d(T + U) = 0$$

O que mostra que a definição correta da energia total precisa de um único termo para a energia potencial de interação. Segue, portanto, que a energia total do sistema se escreve da seguinte forma:

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

Ainda há um detalhe a ser explorado. Como se trata de sistema de dois corpos, escolhemos o CM e podemos escrever:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{M} \vec{v} \\ \vec{v}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{v} \end{cases}$$

De maneira que:

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) v^2 = \frac{1}{2} \mu v^2$$

Onde definimos a massa reduzida  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ . A velocidade nessa expressão é a derivada da coordenada relativa  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Podemos avançar mais um passo, e escrevemos para  $U$ :

$$U = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = U(r)$$

Desta maneira, a energia total do sistema se escreve:

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 + U(r)$$

Ou seja, a energia de uma sistema de dois corpos também é similar à energia de um sistema de um único corpo. Para tal, trocamos  $m$  pela massa reduzida e devemos entender que  $r$  expressa o comportamento da coordenada relativa do sistema.

Para um sistema de  $N$  partículas, esta redução não é possível. Em geral, consideramos:

$$E = \sum_i k_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}$$

onde  $U_{ij}$  é devido a interação entre a partícula  $i$  e a partícula  $j$ . Note o fator  $1/2$ , que evitar contar duas vezes termos do tipo  $U_{12}$  e  $U_{21}$ .

## 2.3 Momento angular e sua conservação

De maneira análoga ao momento linear, podemos consideramos o momento angular de um sistema de  $N$  partículas, o mesmo se escreve:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Vamos agora investigar o momento angular de um sistema de  $N$  partículas. Neste caso, queremos investigar a quantidade:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Para encontrar os resultados, vamos avaliar os torques sobre cada partícula. A soma de todas de todas as forças sobre um sistema de partículas é:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_j' \vec{F}_{ij}$$

Agora, o torque total se escreve:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \vec{r}_i \times \sum_j' \vec{F}_{ij}$$

A primeira parte é devido à forças externas, vamos analisar a segunda parte, que é devido a forças internas  $\vec{F}_{ij}$ . Para fixar ideias, considere uma determinado par de partículas

$$\vec{N}_{\text{int}} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}$$

Mais perceba que o vetor  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  está ao longo da linha que conecta as duas partículas 1 e 2, assim como a força  $\vec{F}_{12}$ , desde que esta força obedeça a terceira lei de Newton. Desta maneira:

$$\vec{N}_{\text{int}} = 0$$

Portanto, forças internas não podem mudar o momento angular total do sistema e ficamos apenas com o torque devido a forças externas. Desta maneira:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{N}^{\text{ext}}$$

E concluímos que a variação do momento angular total do sistema é apenas devido a torques de forças externas. No entanto, perceba que forças internas podem mudar  $\vec{l}_i$ . Um segundo importante resultado, diz respeito ao momento angular das partículas em relação em CM. O momento angular de um sistema de partículas é:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Vamos agora fazer um truque: somar e subtrair a quantidade  $\sum_i M_i \vec{R}_{\text{cm}} \times \vec{v}_i$ , de maneira que:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i + \sum_i m_i \vec{R}_{\text{cm}} \times \vec{v}_i - \sum_i m_i \vec{R}_{\text{cm}} \times \vec{v}_i$$

daí, escrevemos  $\vec{L}$  como a soma dos seguintes termos:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i m_i \vec{R}_{\text{cm}} \times \vec{v}_i + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{\text{cm}}) \times \vec{v}_i \\
&= \sum_i \vec{R}_{\text{cm}} \times m_i \vec{v}_i + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{\text{cm}}) \times m_i \vec{v}_i \\
\vec{L} &= \sum_i \vec{R}_{\text{cm}} \times \vec{p}_i + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{\text{cm}}) \times \vec{p}_i
\end{aligned}$$

Ou seja, o momento angular total tem dois termos.  $\sum_i \vec{R}_{\text{cm}} \times \vec{p}_i$  depende do sistema de coordenadas, é e chamado momento angular extrínseco. Já  $\sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{\text{cm}}) \times m_i \vec{v}_i$  independe do sistema de coordenadas. Trata-se do momento angular total calculado com referência ao CM. Esta quantidade é muitas vezes chamada de spin. Porque este conceito é importante? Perceba que na ausência de forças externas, o CM é um bom sistema de referência inercial. Desta maneira, podemos escolher o CM como origem do sistema de coordenadas. Assim, a expressão para  $\vec{L}$  fica:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Onde todos os vetores estão calculados com respeito ao CM. Se juntarmos os dois resultados desta subseção, chegamos que:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{CM}}}{dt} = \vec{N}_{\text{ext}}$$

Portanto, nosso segundo resultado é que o momento angular calculado com respeito ao CM do sistema é uma quantidade intrínseca.

## 2.4 O problema de 2 corpos

Como um aplicação pormenorizada destes resultados bastante gerais, consideremos o problema de dois corpos que interagem por meio de uma força central. Para formular o problema de dois corpos, relembremos que  $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$  e  $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$  são quantidades conservadas. A conservação de  $\vec{P}$ , nos permite considerar a posição do centro de massa,  $\vec{R}_{\text{cm}}$ , como um referencial inercial. Como já vimos, é muito útil adotar este referencial como origem do sistema de coordenadas e escrevemos a energia total do sistema em termos da posição e velocidade relativa. Consideramos brevemente este desenvolvimento para refrescar a memória.

Primeiro, escrevemos as relações usuais para os vetores posição e velocidade das partículas 1 e 2 e os vetores velocidade e posição relativa:

$$\begin{cases} \vec{R}_{\text{cm}} &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases}$$

Resolvemos o sistema para encontrar  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  e lembramos que adotamos o CM como origem do sistema de coordenadas ( $\vec{R}_{\text{cm}} = 0$ ):

$$\begin{cases} \vec{r}_1 &= \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= -\frac{m_1}{M} \vec{r} \end{cases}$$

De maneira que:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{v} \\ \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{v} \end{cases}$$

Estas expressões são usadas para reescrever a expressão para  $E$ :

$$E = \frac{m_1}{2} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 + U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Em termos apenas da posição e velocidade relativa:

$$E = \frac{\mu}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + U(\vec{r})$$

Nesta expressão:  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  é a massa reduzida do sistema. Agora nos voltamos para as consequências da conservação de  $\vec{L}$  no problema de forças centrais. Notamos que neste caso  $U(\vec{r}) = U(r)$  e que podemos adotar coordenadas polares:

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{\mu}{2} r^2 \dot{\phi}^2 + U(r)$$

Mas há uma quantidade  $L_z$  tal que  $L_z = \mu r^2 \dot{\phi}$  é conservada? E qual sua interpretação? Para o caso de 1 partícula, para o qual  $\mu = m$ , trata-se da componente  $z$  do momento angular do corpo que constitui o sistema. Mas qual a interpretação para o presente caso? Para chegar na resposta, avaliamos o momento angular total do sistema:

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2$$

Substituindo a expressão para  $\vec{v}$ , temos:

$$\begin{aligned} &= \vec{r}_1 \times m_1 \left( \frac{m_2}{M} \vec{v} \right) + \vec{r}_2 \times m_2 \left( -\frac{m_1}{M} \vec{v} \right) \\ &= \mu \vec{r} \times \vec{v} = \mu r^2 \dot{\phi} \end{aligned}$$

Ou seja,  $L_z = \mu r^2 \dot{\phi}$  é a componente  $z$  do momento angular total do sistema. Desta maneira, escrevemos a seguinte expressão para a energia total:

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

ou ainda:

$$\begin{cases} E &= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{eff}(r) \\ V_{eff}(r) &= \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + U(r) \end{cases}$$

Ou seja, as conclusões e métodos enunciados na aula anterior permanecem válidos. Basta considerarmos  $m \rightarrow \mu$  em todas expressões. Como exemplo,  $\omega_0^2$  que escreve:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\mu} \left. \frac{d^2 V_{eff}(r)}{dr^2} \right|_{r=r_{eq}}$$

Para além da questão pragmática do cálculo de  $\dot{\phi}_0$  e  $\omega_0$ , é importante ainda entender o que mais se modifica para o caso de 2 partículas. O primeiro passo é reconhecer que o valor de  $r_{eq}$  é a distância entre as duas partículas. O valor de  $\dot{\phi}_0$  é a taxa na qual a linha que conecta as duas partículas completa o círculo. Cada partícula está em MCU ao redor do CM, mas com raios distintos. Considerando

$m_2 > m_1$  (apenas para efeito do argumento), esperamos que o CM esteja mais próximo a  $m_2$ . De fato, note que os raios do MCU se escrevem:

$$\begin{cases} r_1 &= \frac{m_2}{\mu} r_{eq} \\ r_2 &= \frac{m_1}{\mu} r_{eq} \end{cases}$$

Quando consideramos pequenas oscilações, mais uma vez estamos a discutir variações da distância entre duas partículas. Note que ambas as partículas se afastam e se aproximam do CM com uma fase contrária. De fato, este é um tipo de oscilação acoplada, como um sistema de duas massas conectadas por uma única mola.

## 2.5 Dinâmica de foguetes

Um das mais interessantes aplicações do problema de um sistema de partículas é colocado no contexto da conservação do momento linear de um sistema bastante especial, que é composto por muitas e muitas partículas. Genericamente, chamaremos este sistema de foguete. Um foguete denota um sistema que ejeta massa a uma determinada taxa. A massa é ejetada para fora de uma parte do sistema como um todo, que denotamos nave. A ejeção de massa leva ao aparecimento de uma força efetiva que acelera a nave.

Esta é uma situação onde está claro que a conservação do momento linear do sistema, como um todo, não implica na conservação do momento linear de cada constituinte deste sistema. Vamos revisar as ideias centrais associadas a esta questão e em seguida resolver o problema do foguete sob ação de uma força externa constante.

Estudando inicialmente o foguete livre, definimos as seguintes variáveis para o nosso problema. O foguete tem massa  $m$ , velocidade  $\vec{v}$  e o combustível é ejetado a uma velocidade  $\vec{u}$  em relação à nave. Portanto, um observador em um referencial na base de lançamento mede que a velocidade do combustível é  $\vec{v} + \vec{u}$ , com base nos argumentos já exaustivamente repetidos. Tomando o sistema como o foguete, o que inclui a nave e todo seu combustível, é certo que  $d\vec{P}/dt = 0$ , daí, podemos escrever a seguinte expressão:

$$\vec{P}(t) = \vec{P}(t + dt)$$

Considerando que durante o intervalo de tempo  $dt$ , uma pequena quantidade de massa  $dm' > 0$  é ejetada, escrevemos:

$$m(t)\vec{v}(t) = m(t + dt)\vec{v}(t + dt) + dm'(\vec{v}(t + dt) + \vec{u})$$

Ou ainda:

$$m(t)\vec{v}(t) = [m - dm']\vec{v}(t + dt) + dm'(\vec{v}(t + dt) + \vec{u})$$

Desta maneira temos o seguinte:

$$m(t)[\vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)] = -\vec{u}dm'$$

Neste momento, dividimos ambos os lados da equação por  $dt$  e tomamos o limite  $dt \rightarrow 0$ , de maneira que escrevemos:

$$m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{u}\frac{dm'}{dt}$$

À esquerda desta equação temos, para um dado tempo  $t$ , a massa da nave e sua aceleração. À direita, temos a velocidade (atenção: vetorial) de ejeção do combustível em relação à nave e ainda a taxa com a qual a massa do combustível ejetado aumenta. Certamente que:

$$\frac{dm'}{dt} > 0$$

Podemos ainda lembrar que a variação da massa da nave,  $dm$ , se escreve  $dm = -dm'$ . Desta maneira:

$$m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u} \frac{dm}{dt}$$

É extremamente importante notar que estamos matendo todas as quantidades em notação vetorial. E observe ainda que temos sempre  $dm/dt < 0$ , pois essa taxa expressa a perda de combustível pela nave!

Definimos o termo:

$$\vec{F}_{\text{empuxo}} = \vec{u} \frac{dm}{dt}$$

Como a força de empuxo. Esta é a força efetiva que atua sobre a nave devido a expulsão do combustível. Trata-se, portanto, de uma força interna. Uma vez que  $dm/dt < 0$ , a nave terá uma aceleração sempre na direção contrária a expulsão do combustível (cuja direção é dada por  $\vec{u}$ ).

Vamos aplicar esta equação e reconhecer os resultados já conhecidos. Para um foguete em ascensão, temos  $\vec{u} = -u_e \hat{k}$  e podemos supor que a massa é ejetada a uma taxa constante  $\alpha$  (ou seja:  $dm/dt = -\alpha$ ), de maneira que  $m(t) = m_0 - \alpha t$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{u_e \alpha}{(m_0 - \alpha t)} \hat{k}$$

Resolvendo a equação podemos escrever para a componente  $z$  da velocidade:

$$v_z(t) - v_{z0} = u_e \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right) > 0$$

### 2.5.1 Foguete sob ação de uma força externa

Como modificar este esquema para o estudo de um foguete sob ação de uma força externa? Retornemos ao início, onde escrevemos:

$$\vec{P}(t) = \vec{P}(t + dt)$$

Esta forma é equivalente à:

$$\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) = 0$$

Ou ainda:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

Na presença de uma força externas temos:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}$$

Desta maneira:

$$m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u} \frac{dm}{dt} = \sum \vec{F}$$

### 2.5.2 Problemas comuns

Note que a equação para estudar o foguete pode ser escrita em duas formas. Temos:

$$m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u} \frac{dm}{dt} = \sum \vec{F}$$

ou

$$m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{u} \frac{dm'}{dt} = \sum \vec{F}$$

Note que a mudança do sinal é devido a mudança da quantidade sendo monitorada. Certamente que  $m'$  cresce com o tempo e que  $m$  decresce com o tempo. Uma vez que este ponto seja entendido, o espaço para confusão de sinais reside inteiramente do sinal de  $\vec{u}$ . A melhor maneira para evitar problemas é escrever explicitamente o vetor  $\vec{u}$ , assim como as forças externas  $\vec{F}_i$ , no sistema de coordenadas escolhido. Analisemos algumas situações para ver como que a escolha do sistema de coordenadas elimina problemas. Vamos considerar uma queima a taxa constante  $\alpha$ , com massa ejetada à velocidade com módulo  $u_e$  e a nave no espaço livre. Desta maneira:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{\vec{u}\alpha}{m_0 - \alpha t}$$

Situação 1: foguete querendo acelerar na direção  $\hat{i}$ . Jogamos combustível com velocidade  $\vec{u} = -u_e \hat{i}$ , desta maneira:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{u_e \alpha}{m_0 - \alpha t} \hat{i}$$

Que é compatível com a situação desejada. Situação 2: foguete querendo acelerar na direção  $-\hat{j}$ . Jogamos combustível com velocidade  $\vec{u} = u_e \hat{j}$ , desta maneira:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{u_e \alpha}{m_0 - \alpha t} \hat{j}$$

Que é compatível com a situação desejada, etc...