Partícula em um cone 1

Consideremos uma partícula de massa m, sob a ação de uma energia gravitacional mgz, restrita a mover-se na superfície de um cone, de meio ângulo α (ver Fig. 1). Vamos determinar a lagrangiana e analisar a a dinâmica da partícula, usando as equações de movimento de Lagrange. O que significa analisar uma dinâmica? Significa tirar conclusões gerais, qualitativas sobre a dinâmica desta partícula, tendo como base para nossa argumentação as equações de movimento de Lagrange. Ou seja, nossas conclusões sobre os aspectos qualitativos da dinâmica estarão baseadas em resultados matematicamente rigorosos.

Começamos o problema adotando coordenadas cilíndricas como coordenadas generalizadas. Poderíamos, igualmente, adotar coordenadas esféricas, com a restrição $\theta = \alpha$ e $z = r\cos\theta$. Para v^2 escrevemos em coordenadas cilíndricas:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$$

De maneira que:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

A lagrangiana se escreve:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Notando que:

$$z = r\cot\alpha$$

Escrevemos $\mathcal{L}$ como uma função de r, $\dot{r}$ e $\dot{\phi}$ (ou seja, de fato o vínculo $z = r\cot\alpha$ reduz o número de graus de liberdade do sistema):

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{r}^2\cot^2\alpha) - mgr\cot\alpha = \frac{m}{2}(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\phi}^2) - mgr\cot\alpha$$

As equações do movimento de Lagrange se escrevem:

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} & = mr\dot{\phi}^2 - mg\cot\alpha - \frac{d}{dt}m\dot{r}\csc^2\alpha = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} & = 0 - \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0 \end{cases}$$

Para a coordenada r temos:

$$mr\dot{\phi}^2 - mg\cot\alpha - m\ddot{r}\csc^2\alpha = 0$$

A equação para $\dot{\phi}$ revela a existência de uma quantidade conservada, que denotamos p_ϕ. Escrevemos $\dot{\phi}$ em termos desta quantidade:

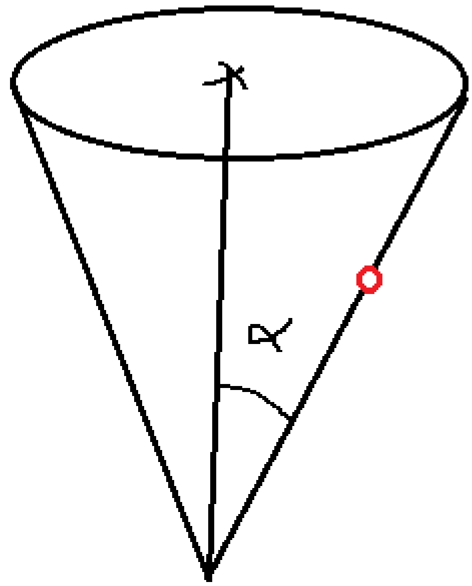

Figura 1: Figura representativa para a partícula no cone.

$$\dot{\phi} = p_\phi / mr^2$$

Daí ficamos com (equação para r):

$$\ddot{r} - \frac{p_\phi^2}{m^2 r^3} \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0 \tag{1}$$

Para encontrar as órbitas circulares, verificamos se podemos encontrar r_0 na condição de equilíbrio ($\ddot{r} = 0$ e $\dot{r} = 0$)

$$r_0^3 = \frac{p_\phi^2 \sin^2 \alpha}{m^2 g \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{p_\phi^2}{m^2 g} \tan \alpha$$

Ou seja, aparentemente há a possibilidade da partícula ter uma dinâmica a r_0 constante (e, devido ao vínculo, a z constante). Mas o que ocorre a esta dinâmica se a perturbamos? Esta dinâmica é estável? Aqui consideramos uma *pequena deformação*. Consideramos que a partícula pode se desviar de r_0 através de uma variável η que definimos como: $\eta = r - r_0$. Esta deformação é pequena, comparada com o raio r_0 do movimento circular. Desta maneira $\eta / r_0 \ll 1$. Note que por nossa definição: $\ddot{\eta} = \ddot{r}$. Assim, escrevemos a equação do movimento em termos de η:

$$\ddot{\eta} - \frac{p_\phi^2}{m^2 (\eta + r_0)^3} \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

Neste momento, consideramos uma aproximação do início do curso: $(1 + \eta/r_0)^{-3} \approx (1 - 3\eta/r_0)$, quando $\eta / r_0 \ll 1$

$$\frac{p_\phi^2}{m^2 (\eta + r_0)^3} \sin^2 \alpha = \frac{p_\phi^2}{m^2 r_0^3 (1 + \eta/r_0)^3} \sin^2 \alpha$$

$$\approx \frac{p_\phi^2}{m^2 r_0^3}\sin^2\alpha(1-3\eta/r_0)$$

Voltando para a eq. diferencial temos:

$$\approx \ddot{\eta} - \frac{p_\phi^2}{m^2 r_0^3}\sin^2\alpha(1-3\eta/r_0) + g\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$= \ddot{\eta} + \frac{p_\phi^2}{m^2 r_0^4}\sin^2\alpha 3\eta - \frac{p_\phi^2}{m^2 r_0^3}\sin^2\alpha + g\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

Observe o termo:

$$-\frac{p_\phi^2}{m^2 r_0^3}\sin^2\alpha + g\sin\alpha\cos\alpha$$

Volte à Eq. 1 acima e perceba que este é o termo usado para calcular a condição de equilíbrio. Ou seja, este termo é igual a 0. Desta maneira ficamos com:

$$\ddot{\eta} + (\frac{3p_\phi^2}{m^2 r_0^4}\sin^2\alpha)\eta = 0$$

Agora definimos:

$$\omega_0^2 = \frac{3p_\phi^2}{m^2 r_0^4}\sin^2\alpha$$

E podemos escrever:

$$= \ddot{\eta} + \omega_0^2\eta = 0$$

Esta é a eq. de um oscilador harmônico simples. Logo, a órbita circular parece ser estável porque ela nos mostra que a partícula ficará oscilando em torno da órbita circular caso a desloquemos do equilíbrio (note ainda que devido o vínculo, isso significa que a partícula está subindo e descendo com esta frequência ω_0). Para ter certeza, precisamos entender se ω_0^2 não muda de sinal:

$$\omega_0^2 = \frac{3p_\phi^2}{m^2 r_0^4}\sin^2\alpha$$

Esta, certamente, é uma quantidade positiva para qualquer valor dos parâmetros da expressão. Agora, segue uma outra pergunta: a órbita é fechada? Para tal, precisamos saber se as frequências de revolução ($\dot{\phi}$) e de oscilação radial (ω_0 acima calculada) são comensuráveis. Em primeira aproximação, usamos que a frequência $\dot{\phi}$ pode ser aproximada pelo valor do movimento circular, portanto:

$$\dot{\phi}_0 \approx \frac{p_\phi}{m r_0^2} = \text{constante}$$

$$\omega_0/\dot{\phi}_0 = \sqrt{3}\sin\alpha$$

Portanto, a órbita é fechada apenas quando:

$$\sin\alpha = \frac{n}{\sqrt{3}}$$

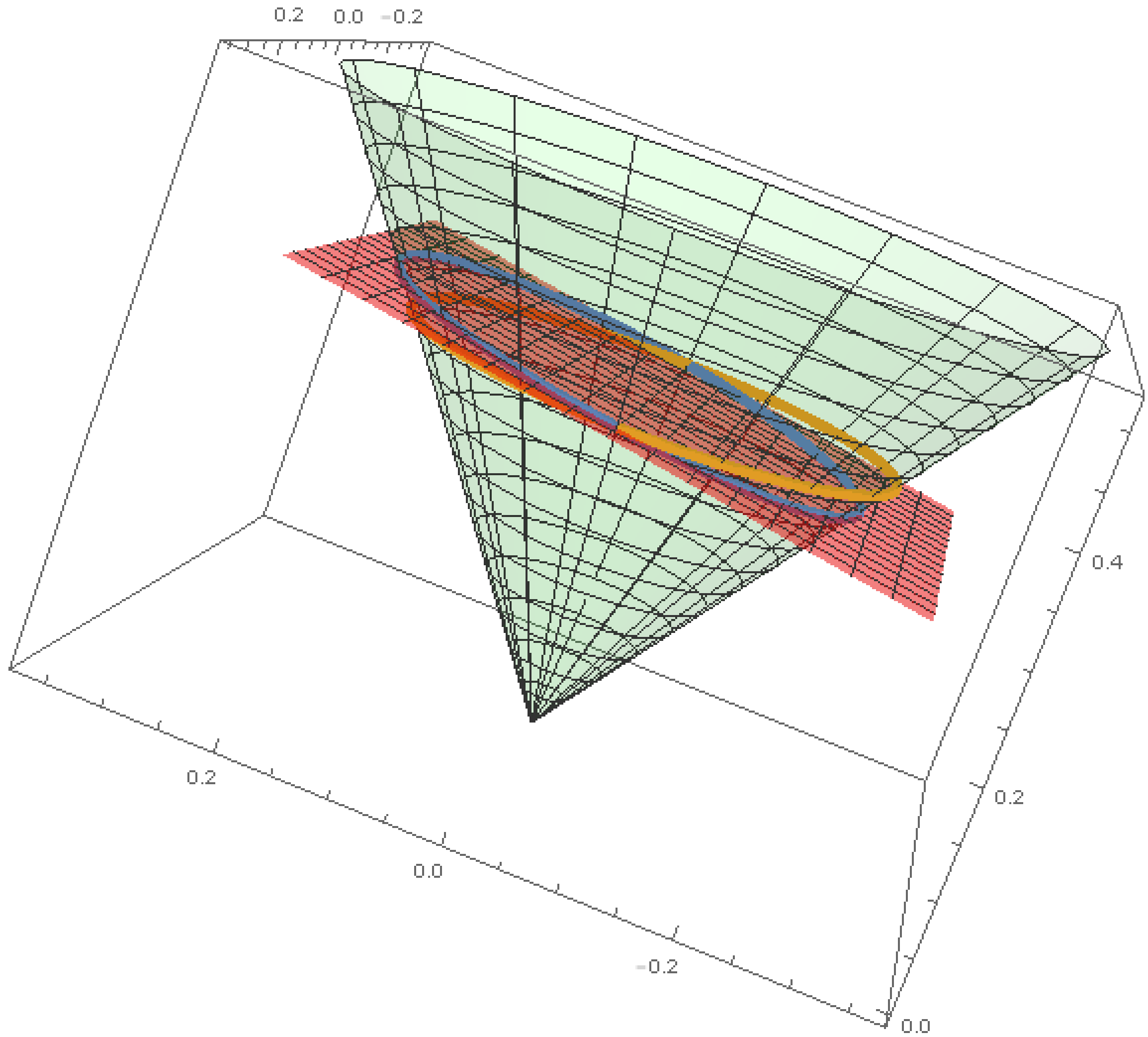

Figura 2: Figura que ilustra a órbita da partícula no cone para $n = 1$.

Com n um número racional. Em particular, $n = 1$ representa uma situação important . Note ainda que nesta situação ($\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$, e denotamos este α como α_0: $\sin\alpha_0 = 1/\sqrt{3}$), temos $\omega_0 = \dot{\phi}_0$ e este fato nos permite fazer uma importante interpretação geométrica, que pode ser entendida com referência a figura 2. A trajetória laranja, descreve o caso para $r = r_0$ constante, já a trajetória azul é a trajetória para pequenas oscilações e ângulo $\alpha = \alpha_0$. Certamente, que todos os pontos da trajetória laranja estão em um plano, que é perpendicular ao eixo do cone. Um resultado não trivial, no entanto, é que os pontos da segunda trajetória também se localizam em um mesmo plano, que está em vermelho na figura.

Outro aspecto importante, é que podemos considerar pequenos desvios de α_0, de maneira que ω_0 poderá ser maior ou menor que $\dot{\phi}_0$. Para $\omega_0 \lesssim \dot{\phi}_0$, observaremos um avanço desta órbita, enquanto que um retrocesso seria observado para $\omega_0 \gtrsim \dot{\phi}_0$ (avanços e retrocessos aqui usados no contexto da precessão de trajetórias).

Outros valores para α, distantes de α_0 são possiveis, mas não permitem uma interpretação geométrica clara como esta que desenvolvemos. Vejam na página do curso um notebook para visualizar outras trajetórias de pequenas oscilações da partícula no cone.