Mecânica Quântica II - 4302404

1ª Prova

1) Considere um elétron num estado com $l = 1$ com uma hamiltoniana de interação dada por $H = 2A\vec{S}.\vec{L}$, onde A é uma constante.

a) Quais são os auto-estados e auto-valores de H? Existe degenerescência?

b) Represente o auto-estado com $j = 3/2$ e $m = m_s + m_l = -1/2$, nos auto-estados da base produto.

c) Se voce medir S_z no estado do ítem c), quais valores podem ser obtidos, e quais as probabilidades?

d) Se numa medida de S_z no estado do ítem c) voce obtiver $-\hbar/2$, numa medida subsequente de L_z quais valores podem ser obtidos, e quais as probabilidades?

2) Considere um oscilador harmônico cuja Hamiltoniana, na representação de Heisenberg, é dada por:

$$H = \hbar\omega\left(a_{+H}a_{-H} + \frac{1}{2}\right).$$

Sabendo que $[a_{-H}, a_{+H}] = 1$, use a equação de movimento de Heisenberg:

$$i\hbar\frac{dA_H(t)}{dt} = [A_H(t), H],$$

para deteminar os operadores levantamento e abaixamento: $a_{+H}(t)$ e $a_{-H}(t)$. Usando isso mostre explicitamente que H não depende de t.

3) Considere a hamiltoniana

$$H = H_0 + H'$$

onde H_0 é a hamiltoniana de um oscilador harmônico bidimensional:

$$H_0 = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(X^2 + Y^2)$$

e H' é a perturbação :

$$H' = m\omega^2 XY.$$

a) Determine, para o estado fundamental, a correção de primeira ordem para o autoestado e até segunda ordem para a energia.

b) Para os estados degenerados com energia igual a $2\hbar\omega$, calcule os autoestados em ordem zero e as energias em primeira ordem.

4) Considere a linha do espectro de emissão do átomo de hidrogênio da transição : $n = 3 \rightarrow n = 1$. Considere $hc \sim 12 \times 10^{-5}$ eV.cm e $mc^2 \sim 5 \times 10^5$ eV.

a) Encontre, sem considerar as correções de estrutura fina, o comprimento de onda dessa linha.

b) Sabendo que as correções de estrutura fina são dadas por:

$$E_{sf}^{(1)} = \frac{(E_n^{(0)})^2}{2mc^2}\left(3 - \frac{4n}{j + 1/2}\right),$$

calcule as correções de estrutura fina para as linhas com $n = 1$ e $n = 3$. Essas linhas ficam mais ou menos ligadas devido a essas correções ?
c) Devido à essas correções de estrutura fina quantas transições possíveis existem entre essas duas linhas originais? Indique numa figura as várias transições possíveis.

Formulário

$$J_\pm|j\ \ m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\ |j\ \ m\pm 1\rangle,\quad |j\ m, l\ s\rangle = \sum_{m_l, m_s} C^{l\ \ s\ \ j}_{m_l\ m_s\ m}\ |l\ m_l\rangle|s\ m_s\rangle$$

Oscilador Harmônico de frequência ω

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}X^2,\quad H|n\rangle = E_n|n\rangle,\quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),\quad n = 0, 1, ...$$

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_+ + a_-),\quad [a_+, a_-] = -1,\quad a_+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle,\quad a_-|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,$$

$$E_n^{(1)} = \langle\Psi_n^{(0)}|H'|\Psi_n^{(0)}\rangle,\quad |\Psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{k\neq n}\frac{\langle\Psi_k^{(0)}|H'|\Psi_n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}|\Psi_k^{(0)}\rangle,\quad E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n}\frac{|\langle\Psi_k^{(0)}|H'|\Psi_n^{(0)}\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

$\langle m|H'|n\rangle$

$$\det[H' - E^{(1)}] = 0,\quad \text{onde } H'_{i,j} = \langle\Psi_i^{(0)}|H'|\Psi_j^{(0)}\rangle$$

$$H'|\psi\rangle = E^{(1)}|\psi\rangle,\ \text{onde } |\psi\rangle = \sum \alpha_i|\Psi_i^{(0)}\rangle,\ \text{e } |\Psi_i^{(0)}\rangle \text{ são os estados degenerados.}$$

$$\text{átomo de Hidrogênio: } E_n^{(0)} = -\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{1}{n^2} = \frac{E_1^{(0)}}{n^2} = \frac{-13.6}{n^2}\ \text{eV}$$

TABLE 4.8: Clebsch-Gordan coefficients. (A square root sign is understood for every entry; the minus sign, if present, goes *outside* the radical.)

1/2 × 1/2

m_1	m_2	$J=1$, $M=+1$
+1/2	+1/2	1

m_1	m_2	$J=1$, $M=0$	$J=0$, $M=0$
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=1$, $M=-1$
−1/2	−1/2	1

1 × 1/2

m_1	m_2	$J=3/2$, $M=+3/2$
+1	+1/2	1

m_1	m_2	$J=3/2$, $M=+1/2$	$J=1/2$, $M=+1/2$
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

m_1	m_2	$J=3/2$, $M=-1/2$	$J=1/2$, $M=-1/2$
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

m_1	m_2	$J=3/2$, $M=-3/2$
−1	−1/2	1

2 × 1

m_1	m_2	$J=3$, $M=+3$
+2	+1	1

m_1	m_2	$J=3$, $M=+2$	$J=2$, $M=+2$
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

m_1	m_2	$J=3$, $M=+1$	$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	6/15	−1/2	1/10

m_1	m_2	$J=3$, $M=0$	$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	$J=3$, $M=-1$	$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
0	−1	6/15	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

m_1	m_2	$J=3$, $M=-2$	$J=2$, $M=-2$
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

m_1	m_2	$J=3$, $M=-3$
−2	−1	1

1 × 1

m_1	m_2	$J=2$, $M=+2$
+1	+1	1

m_1	m_2	$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$	$J=0$, $M=0$
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

m_1	m_2	$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=2$, $M=-2$
−1	−1	1

2 × 1/2

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+5/2$
+2	1/2	1

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+3/2$	$J=3/2$, $M=+3/2$
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+1/2$	$J=3/2$, $M=+1/2$
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-1/2$	$J=3/2$, $M=-1/2$
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-3/2$	$J=3/2$, $M=-3/2$
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-5/2$
−2	−1/2	1

3/2 × 1/2

m_1	m_2	$J=2$, $M=+2$
+3/2	+1/2	1

m_1	m_2	$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

m_1	m_2	$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

m_1	m_2	$J=2$, $M=-2$
−3/2	−1/2	1

3/2 × 1

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+5/2$
+3/2	+1	1

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+3/2$	$J=3/2$, $M=+3/2$
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+1/2$	$J=3/2$, $M=+1/2$	$J=1/2$, $M=+1/2$
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-1/2$	$J=3/2$, $M=-1/2$	$J=1/2$, $M=-1/2$
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-3/2$	$J=3/2$, $M=-3/2$
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-5/2$
−3/2	−1	1