Mecânica Quântica II - 4302404

$2^{\underline{a}}$ Prova

1) Considere o átomo de hidrogênio submetido a um campo magnético externo forte, na direção do eixo z (efeito Zeeman forte):

$$H_Z = \frac{\mu_B}{\hbar} B_{ext}(L_z + 2S_z).$$

Na ausência do campo magnético externo, os oito estados com $n = 2$ no átomo de hidrogênio são: $|2\ l\ s\ m_l\ m_s\rangle = \psi_{2l}(r)|l\ m_l\rangle|1/2\ m_s\rangle$, onde $H_0|2\ l\ s\ m_l\ m_s\rangle = E_2^{(0)}|2\ l\ s\ m_l\ m_s\rangle$.
a) Determine as auto-energias dos auto-estados de $H = H_0 + H_z$. Existe degenerescência?
b) Considere agora o acoplamento spin-órbita como uma pequena correção a essa H:

$$H'_{LS} = \frac{\hbar^2}{2m^3c^2}\frac{1}{ar^3}\vec{L}.\vec{S},$$

onde a é o raio de Bohr. Determine as correções em primeira ordem na energia sabendo que

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{2l} = \frac{1}{a^3 2^3}\frac{1}{l(l+1)(l+1/2)}.$$

Escreva tua resposta em termos de $E_2^{(0)}$, as autoenergias do átomo de hidrogênio para $n = 2$. Ainda existe degenerescência?

2) Considere um elétron em repouso numa região onde existe um campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\hat{k} + B_0\hat{i}$, para o qual a hamiltoniana do sistema é:

$$H = H_0 + H', \text{ onde } H_0 = \frac{eB_0}{m}S_z, \text{ e } H' = \frac{eB_0}{m}S_x.$$

a) Encontre os autovalores exatos da hamiltoniana perturbada: $H = H_0 + H'$.
b) Estime a energia do estado fundamental do sistema perturbado, usando o princípio variacional com a função tentativa, normalizada, na forma:

$$|\Psi(\phi)\rangle = \cos\phi|\uparrow\rangle + \sin\phi|\downarrow\rangle,$$

onde ϕ é o parâmetro variacional e $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ são os autoestados de S_z com autovalores $\pm\frac{\hbar}{2}$. Compare suas respostas nos ítens a) e b).

3) Considere um sistema de dois níveis com os autoestados $|1\rangle$, $|2\rangle$, com energias E_1 e E_2 respectivamente ($E_2 > E_1$). Suponha que o sistema se encontre inicialmente no estado $|1\rangle$. Se o sistema é submetido a uma perturbação :

$$H'(t) = \begin{pmatrix} 0 & V_0\cos\omega t \\ V_0\cos\omega t & 0 \end{pmatrix},$$

Fazendo as hipóteses usuais ($E_2 - E_1 \sim \hbar\omega$) determine a probabilidade de haver uma transição $|1\rangle \to |2\rangle$.

Formulário

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_+ + a_-), \quad [a_+, a_-] = -1, \quad a_+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad a_-|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,$$

$$a_+a_-|n\rangle = N|n\rangle = n|n\rangle, \quad H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_n = \hbar\omega(n+1/2)$$

$$|l\ m\rangle = Y_l^m(\theta, \varphi), \quad L^2|l\ m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l\ m\rangle, \quad L_z|l\ m\rangle = \hbar m|l\ m\rangle$$

$$L_\pm = \frac{L_x \pm iL_y}{2}, \quad L_\pm|l\ m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\ |l\ m\pm 1\rangle$$

$$E_n^{(1)} = \langle\Psi_n^{(0)}|H'|\Psi_n^{(0)}\rangle, \quad |\Psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{k\neq n} \frac{\langle\Psi_k^{(0)}|H'|\Psi_n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}|\Psi_k^0\rangle, \quad E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n} \frac{|\langle\Psi_k^{(0)}|H'|\Psi_n^{(0)}\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

$$\det[H' - E^{(1)}] = 0, \quad \text{onde } H'_{i,j} = \langle\Psi_i^{(0)}|H'|\Psi_j^{(0)}\rangle$$

$$H'|\psi\rangle = E^{(1)}|\psi\rangle, \text{ onde } |\psi\rangle = \sum \alpha_i|\Psi_i^{(0)}\rangle, \text{ e } |\Psi_i^{(0)}\rangle \text{ são os estados degenerados.}$$

$$\text{átomo de Hidrogênio: } E_n^{(0)} = -\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{n^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a^2n^2}, \quad \frac{1}{a} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{m}{\hbar^2}$$

$$E[\lambda] = \frac{\langle\psi(\lambda)|H|\psi(\lambda)\rangle}{\langle\psi(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle}, \quad \left.\frac{\partial E[\lambda]}{\partial\lambda}\right|_{\lambda_0} = 0 \Rightarrow E[\lambda_0] \geq E_{min}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \dot{c}_n \end{pmatrix} = -\frac{i}{\hbar}\begin{pmatrix} H'_{11} & H'_{12}e^{i\omega_{12}t} & . & . & . & H'_{1n}e^{i\omega_{1n}t} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ H'_{n1}e^{i\omega_{n1}t} & . & . & . & . & H'_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \omega_{ij} = \frac{E_i - E_j}{\hbar}$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$