Mecânica Quântica II - 4302404

3ª Prova

1) Um elétron, inicialmente no estado $|3\ 1\ 0\rangle$, decai por emissão espontânea no estado fundamental.

a) Usando as regras de seleção mostre as rotas que esse decaimento pode seguir através de esquemas do tipo:

$$|3\ 1\ 0\rangle \rightarrow |n\ l\ m\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |1\ 0\ 0\rangle$$

b) Chamando de K_{3n} o resultado da integral radial, determine $\vec{p}_{3n} = e\langle 3\ 1\ 0|\vec{r}|n\ l\ m\rangle$, para todas etapas nas rotas indicadas no item a), em termos de K_{3n} .

c) Sabendo que a vida média de um estado, em etapas até o estado fundamental, é dada por:

$$\tau = \frac{1}{A} = \sum_n \frac{3\pi\epsilon_0\hbar^4 c^3}{|\vec{p}_{3n}|^2 (E_3 - E_n)^3}$$

compare as vidas médias para os vários decaimentos possíveis analisados no item b).

d) Porque existe emissão espontânea mas não existe absorção espontânea?

2) A interação entre prótons e neutrons no núcleo pode ser parametrizada pelo potencial de Yukawa:

$$V(r) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

onde μ representa a massa da partícula trocada.

a) Calcule a amplitude de espalhamento para o potencial de Yukawa na aproximação de Born.

b) Mostre que usando $\mu = 0$ e $\beta = q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0)$, ou seja, para o potencial coulombiano, voce obtem a fórmula de Rutherford:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 E \sin^2(\theta/2)} \right|^2, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

c) Calcule a amplitude de espalhamento para o potencial de Yukawa na aproximação de Born em baixas energias. Mostre que esse resultado pode ser obtido do resultado do item a) no limite $q^2 \rightarrow 0$. Determine a seção de choque total nesse limite.

3) Partindo da equação para a expansão da amplitude de espalhamento em ondas parciais $f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(\cos\theta)$, que fornece $\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2(\delta_l)$, prove o **teorema ótico**:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im}[f(0)].$$

4) a) Usando as substituições usadas por Schrödinger:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

e a equação da energia relativística: $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ determine a equação relativística quântica correspondente, ou seja, a equação de Klein-Gordon.

b) Essa equação pode ser reescrita simplificadamente em termos do operador quadri-momento $p^\mu = i\hbar\partial^\mu$ (onde $\partial^\mu = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$) como: $p_\mu p^\mu = m^2 c^2$. Para fatorizar essa equação, e escrever uma equação de primeira ordem, Dirac introduziu as matrizes γ_μ (conhecidas agora como matrizes de Dirac) tal que

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)(\gamma^\nu p_\nu + mc) = p_\mu p^\mu - m^2 c^2.$$

Partindo de $(\gamma^\mu p_\mu - mc)(\gamma^\nu p_\nu + mc)$ mostre que a relação acima é verdadeira se $(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2g^{\mu\nu}$, onde

$$g^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{para } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{para } \mu = \nu = i, i = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{para } \mu \neq \nu \end{cases}$$

dica: mostre que, como existe uma somatória implícita sempre que os índices estão repetidos, podemos escrever: $\gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) p_\mu p_\nu$

c) A equação de Dirac é: $(\gamma^\mu p_\mu - mc)\Psi = 0$. Para $\Psi = \psi(t)$, ou seja, se a função de onda depender apenas do tempo, a equação fica: $\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i \frac{mc^2}{\hbar} \psi$. Usando

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e } \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

determine $\psi_i(t)$. Mostre que escrevendo as soluções obtidas em termos de $e^{-iEt/\hbar}$, a equação de Dirac possui soluções de energia positiva e negativa. Quais são essas energias?

Formulário

átomo de hidrogênio: $|n l m\rangle = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$,

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}, \quad a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m}$$

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$$

primeira aproximação de Born para o espalhamento:

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3 r' e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}'), \quad \vec{q} = \vec{k} - \vec{\kappa}, \quad \theta \text{ é o ângulo entre } \vec{k} \text{ e } \vec{\kappa}$$

aproximação de Born para o espalhamento à baixas energias:

$$f = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3 r V(\vec{r})$$

aproximação de Born para o espalhamento com potenciais centrais:

$$f(\theta) = -\frac{2m}{q\hbar^2} \int_0^\infty dr r \sin(qr) V(r), \quad q = 2k \sin(\theta/2), \quad k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$$

O quadri-momento p^μ de uma partícula de energia E , massa m e momento linear $\vec{p}$ é: $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ onde $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$. O produto $p^\mu p_\mu = p_0 p_0 - \vec{p}\cdot\vec{p} = m^2 c^2$ é um invariante.